UNIVERSITE DE BOURGOGNE

MM5: Analyse Numérique Elémentaire

Fiche de TD no 6

1. Interpréter géométriquement et décrire les formules de quadratures élémentaires pour les deux méthodes suivantes:

   (a) la méthode de Heun:

   $$\phi(t,x,h) = \frac{1}{2}\left(f(t,x) + f(t+h, x+hf(t,x))\right)$$

   (b) la méthode d'Euler modifiée:

   $$\phi(t,x,h) = f\left(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}hf(t,x)\right)$$

2. Considérons le système suivant

   $$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t) \text{ entre } 0 \text{ et } 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

   et notons $\left(x_n^N\right)_{n=0\ldots N}$ la solution calculée en utilisant la méthode d'Euler avec un pas constant $h = \frac{1}{N}$ et sans erreur initiale (*i.e.* $x_0 = 1$). Montrer que

   $$x_N^N - x(1) = -\frac{1}{2}\frac{e}{N} + \frac{11}{24}\frac{e}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right)$$

3. On considère le problème de Cauchy

   $$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t))$$
   $$x(0) = \eta \text{ entre } 0 \text{ et } T$$

   où $f : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est supposé deux fois continuement différentiable. Soit $\Phi : [0,T] \times \mathbb{R} \times [0,H] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, uniformément lipschitzienne en la seconde variable, et telle que $\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t,x,h)$ existe et soit aussi continue.

   (a) Décrire la méthode à un pas basée sur la fonction Φ. Est-elle stable ?

   (b) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que cette méthode soit au moins d'ordre 2 est que

   $$\Phi(t,x,0) = f(t,x)$$
   $$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t,x,0) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\, f(t,x)$$

   pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$.

   (c) Soit le problème de Cauchy suivant

   $$\frac{dx(t)}{dt} = -\sin(t\,x(t))$$
   $$x(t_0) = \eta \text{ entre } t_0 \text{ et } t_0 + T$$

   et

   $$\Phi(t,x,h) = \sin((t+h)\ x)\,(h\,t\cos(t\,x) - 1)$$

   Montrer que la méthode à un pas basée sur Φ est au moins d'ordre 2.

4. On se propose d'étudier le problème de Cauchy suivant

   $$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -1000\left(x(t) - t^2\right) + 2t \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

   entre 0 et 1.

(a) Montrer que la solution est $x(t) = t^2$.

(b) Calculer ε_{n+1} en fonction de ε_n où ε_n représente l'erreur d'intégration numérique entre la méthode d'Euler et la solution exacte.

(c) Montrer, sans utiliser le théorème du cours, que l'erreur est en $O(h)$ où h est le pas supposé constant.

5. On veut résoudre numériquement le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) & = & f(x(t)) \\ x(t_0) & = & \eta \end{cases}$$

entre t_0 et $t_0 + T$, f étant une fonction lipschitzienne indépendante de t, dont la dérivée f' est supposée connue explicitement. La méthode à un pas proposée est fondée sur la fonction Φ suivante:

$$\Phi(t, x, h) = \alpha f(x) + \beta f(x + \gamma h f(x)) + \delta h^2 f(x) f'(x)^2$$

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette méthode soit consistante.

(b) A quelles conditions sur la fonction f cette méthode sera-t-elle convergente ?

(c) Sous quelles conditions sur α, β, γ et δ est-ce une méthode de Runge-Kutta ? Quel est alors l'ordre maximum de cette méthode ?

(d) Déterminer α, β, γ et δ pour que cette méthode soit d'ordre 3.

(e) Cette méthode peut-elle être d'ordre 4 ?

6. Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) & = f(t, x(t)) \\ x(t_0) & = \eta \end{cases} \tag{1}$$

entre t_0 et $t_0 + T$ où $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}$ est supposée continue en t et continuement différentiable en x avec

$$\forall (t, x) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) \right| \leq L \tag{2}$$

On considère la méthode à un pas **implicite** caractérisée par:

$$\Phi(t, x, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, \xi\right) \tag{3}$$

où ξ est donné par

$$\xi = x + \frac{h}{2} f\left(t + \frac{h}{2}, \xi\right) \tag{4}$$

(a) Montrer que cette méthode est consistante.

(b) Sous l'hypothèse (2), montrer qu'elle est stable.

(c) En déduire qu'elle est convergente.

(d) Montrer qu'elle est au moins d'ordre 2.

(e) A quelle condition sur h cette méthode est-elle bien définie ?

(f) On se place dans le cas particulier où $t_0 = 0$, $\eta = 1$ et $f(t, x) = \alpha x$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ dans (1). On notera $t_n = nh$ et $T = Nh$. Montrer que si z_N représente la solution approchée du même problème par la méthode implicite caractérisée par (3) et (4), *i.e.*

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + h\Phi(t_n, z_n, h) \\ z_0 &= 1 \end{aligned}$$

et dans l'hypothèse trouvée dans la question 5, alors

$$z_N = x(T)\left(1 + \frac{\alpha^3 T h^2}{12} + O\left(h^3\right)\right)$$

(g) Que pouvez vous en conclure sur l'ordre de cette méthode ?

7. On se propose d'étudier l'influence des erreurs d'arrondi pour une méthode à 1 pas stable d'ordre p sans erreur initiale. On suppose qu'a chaque itération, on commet une erreur numérique ρ_n sur le calcul de $\Phi(t_n, x_n, h_n)$, σ_n sur l'itération proprement dite, et ε sur la condition initiale *i.e.*

$$\begin{cases} \widehat{x}_{n+1} = \widehat{x}_n + h_n \left(\Phi\left(t_n, \widehat{x}_n, h_n\right) + \rho_n\right) + \sigma_n \\ \widehat{x}_0 = \varepsilon \end{cases}$$

On suppose $|\rho_n| < R$ et $|\sigma_n| < S$ qui sont deux constantes qui dépendent de la précision des calculs numériques et, pour R, de la qualité de l'approximation de la fonction à intégrer. Pour simplifier, on suppose le pas constant $h = \frac{T}{N}$

(a) Montrer que

$$\max_{0 \leq n < N} |x(t_n) - \widehat{x}_n| \leq M \left(|\varepsilon| + TR + NS + Kh^p\right)$$

(b) Etudier le comportement de cette majoration en fonction de h. En particulier, montrer qu'il existe un pas optimal h^* pour lequel ce majorant est minimal.

8. On cherche à approcher la solution $x(t)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) & = & f(t, x(t)) \\ x(t_0) & = & \eta \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5}$$

entre t_0 et $t_0 + T$ où $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est supposée suffisamment régulière et lipschitzienne en sa seconde variable uniformément en la première. On utilise la méthode suivante

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & x_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})\right) \\ x_0 & = & \eta \end{cases} \tag{6}$$

(a) Montrer que cette méthode est une méthode de Runge-Kutta implicite.

(b) Montrer que, pour h assez petit, on peut écrire cette méthode sous la forme

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & x_n + h\Phi(t_n, x_n, h) \\ x_0 & = & \eta \end{cases} \tag{7}$$

(c) Montrer que pour $f(t, x) = ax + b$ $(A \neq 0)$, on a

$$\Phi(t, x, h) = (ax + b) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{ah}{2}\right)^i \tag{8}$$

et calculer l'ordre de la méthode (6) dans ce cas.

(d) On considère la méthode définie par

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & x_n + h\Psi(t_n, x_n, h) \\ x_0 & = & \eta \end{cases} \tag{9}$$

avec

$$\Psi(t, x, h) = \frac{1}{4} f(t, x) + \frac{3}{4} f\left(t + \frac{2}{3}h, x + \frac{2h}{3}\Phi\left(t, x, \frac{2}{3}h\right)\right)$$

Démontrer que si la méthode (7) est d'ordre 2 au moins, la méthode (9) est d'ordre 3 au moins.

(e) Appliquer la méthode (9) au cas $f(t, x) = ax + b$ et déterminer la fonction Ψ.

9. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) & = & f(t, x(t)) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases}$$

Soit $A = (a_{j,i})_{j,i=1,2,\dots,s}$ une matrice réelle et $b = (b_1, \dots, b_s)^T$ un vecteur réel. On considère la méthode de Runge–Kutta

$$\begin{aligned} \alpha_j &= x_n + h \sum_{i=1}^{s} a_{j,i} f(t_n + c_i h, \alpha_i) \text{ pour } j = 1, \dots, s \\ x_{n+1} &= x_n + h \sum_{j=1}^{s} b_j f(t_n + c_j h, \alpha_j) \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\alpha} &= (\alpha_1, \dots, \alpha_s)^T \in \mathbb{R}^{s\times 1} \\ \overrightarrow{u} &= (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{s\times 1} \end{aligned}$$

et on applique la méthode de Runge–Kutta à l'équation

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

en supposant h assez petit pour que la matrice $I - hA$ soit inversible.

(a) Prouver que

$$\overrightarrow{\alpha} = (I - hA)^{-1} x_n \overrightarrow{u}$$

(b) Montrer que

$$x_{n+1} = \left(1 + hb^T (I - hA)^{-1} \overrightarrow{u}\right) x_n$$

(c) On suppose maintenant que la méthode de Runge–Kutta est explicite.

i. Montrer qu'il existe un polynôme $r \in \mathcal{P}_s$ tel que

$$x_{n+1} = r(h)\, x_n$$

ii. En déduire qu'une méthode de Runge–Kutta explicite a un ordre au plus s.

10. **Contrôle du pas et méthodes de Runge-Kutta emboitées.** Soient $\Phi(t,x;h)$ et $\Phi^*(t,x;h)$ les fonctions correspondant à deux méthodes de Runge-Kutta d'ordre p et $p+1$ respectivement.

(a) Montrer que l'erreur de consistance ε_n de la méthode d'ordre p peut s'écrire

$$\varepsilon_n = h_n \left(\Phi(t_n, x_n; h_n) - \Phi^*(t_n, x_n; h_n)\right) + O\left(h_n^{p+2}\right)$$

(*Indication: en notant* ε_n^* *l'erreur de consistance de la méthode d'ordre* $p+1$*, montrer que* $\varepsilon_n - \varepsilon_n^* = O\left(h_n^{p+2}\right)$ *par un développement limité au voisinage de* $(t_n, x_n, 0)$).

(b) Supposons que les deux méthodes sont emboitées, c'est à dire représentables de la façon suivante:

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_q & a_{q1} & \cdots & a_{qq} \\ \hline & b_1 & \dots & b_q \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1q} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_q & a_{q1} & \cdots & a_{qq} & 0 \\ 1 & b_1 & \cdots & b_q & 0 \\ \hline & b_1^* & \cdots & b_q^* & b_{q+1}^* \end{array}$$

i. Donner un exemple de méthodes de Runge-Kutta emboitées

ii. Décrire une méthode de contrôle du pas basé sur ces méthodes (donner les équations de $\Phi(t,x;h)$, $\Phi^*(t,x;h)$ et une technique simple pour choisir le pas).

11. **Méthode des perturbations.** Le problème est de résoudre

$$x(t_0) = \eta$$
$$\frac{dx}{dt}(t) + p(t)x(t) = 0$$
$$p(t) = p_0(t) + \varepsilon p_1(t) + \varepsilon^2 p_2(t)$$

où ε est un petit paramètre, sachant que l'on a déjà trouvé la solution $x_0(t)$ du problème suivant:

$$x(t_0) = \eta$$
$$\frac{dx}{dt}(t) + p_0(t)x(t) = 0$$

Cette méthode consiste à supposer que la solution va s'ecrire sous la forme

$$x^\varepsilon(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots$$

puis à identifier les coefficients des ε^k pour $k = 1, 2, \ldots$. Utiliser cette méthode pour résoudre

$$x(0) = 1$$
$$\frac{dx}{dt}(t) + (1 - \varepsilon t)x(t) = 0$$

lorsque $\varepsilon t \ll 1$.

12. Identifier les méthodes d'intégrations utilisées pour le calcul de $x_{n,1}$, $x_{n,2}$, $x_{n,3}$, $x_{n,4}$ et x_{n+1} dans la méthode de Runge-Kutta classique d'ordre 4

13. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{array}{ll} x(a) = x_0 & \\ \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) & \qquad t \in [a, b] \end{array}$$

où on suppose f continue sur $[a, b] \times \mathbb{R}$ lipschitzienne en x. On intègre cette équation à l'aide du schéma itératif

$$x_{n+1} = x_n + h\phi(t_n, x_n, h)$$

où $t_n = a + nh$, $h = \frac{b-a}{N}$, $n = 0, \ldots, N$ et

$$\phi(t, x, h) = 2f\left(t + \frac{h}{4}, x + \frac{h}{4} f(t, x)\right) - f(t, x)$$

   (a) Etude de convergence:
      i. Vérifier que cette méthode est consistante.
      ii. Montrer qu'elle est stable.
      iii. Montrer qu'elle est convergente.
      iv. Etudier son ordre.
   (b) Interpréter géométriquement cette méthode.
   (c) On pose $f(t, x) = -\lambda x$ avec $\lambda > 0$ et $a = 0$.
      i. Quelle est la solution du problème de Cauchy sur $\mathbb{R}^+$?
      ii. Montrer que le schéma itératif peut se mettre sous la forme $x_{n+1} = P(\lambda h)\, x_n$ où P est un polynôme de degré 2 à préciser.
      iii. Pour quelles valeurs de λ a-t-on $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$?

14. On s'intéresse à la résolution numérique du problème de Cauchy $\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t))$ avec condition initiale $x(t_0) = \eta$ entre t_0 et $t_0 + T$ par une méthode de Runge-Kutta donnée par

$$\Phi(t, x, h) = \sum_{i=1}^{q} b_i f(t + c_i h, x_i) \tag{10}$$

où les q points intermédiaires $(x_i)_{i=1,\dots,q}$ sont définis par les relations classiques. On suppose que f est p fois continûment différentiable ($p \geq 1$) dans $[t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}$ et que les fonctions Φ, $\frac{\partial \Phi}{\partial h}, \dots, \frac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}$ existent et sont continues dans $[t_0, t_0+T] \times \mathbb{R} \times [0, T]$.

On rappelle la notation

$$\begin{cases} f^{(0)}(t,x) = f(t,x) \text{ et pour } j \geq 0 : \\ f^{(j+1)}(t,x) = \frac{\partial f^{(j)}}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial f^{(j)}}{\partial x}(t,x)\, f(t,x) \end{cases}$$

(a) Expliciter Φ lorsque $f(t,x) = kt^{k-1}$ pour k fixé entre 1 et p et montrer que la relation

$$\frac{\partial^{k-1}\Phi}{\partial h^{k-1}}(t,x,0) = \frac{1}{k} f^{(k-1)}(t,x) \tag{11}$$

s'écrit

$$\sum_{i=1}^{q} b_i c_i^{k-1} = \frac{1}{k} \tag{12}$$

(b) En déduire que si la méthode de Runge-Kutta (10) est d'ordre p, la formule de quadrature élémentaire

$$\int_0^1 g(t)\, dt \approx \sum_{i=1}^{q} b_i g(c_i) \tag{13}$$

est nécessairement d'ordre au moins $p-1$.

(c) Montrer qu'une formule de quadrature à q points telle que (13) est au plus d'ordre $2q-1$ (on pourra considérer la fonction $g(t) = t^{2q}$ et son polynôme d'interpolation de Hermite simple). En déduire que la méthode de Runge-Kutta (10) est d'ordre au plus $2q$.

(d) On veut trouver une méthode de Runge-Kutta d'ordre maximum avec $q = 2$. Déterminer les valeurs de b_1, b_2, c_1 et c_2.