UNIVERSITE DE BOURGOGNE

MM5: Analyse Numérique Elémentaire

Fiche de TD no 5

1. On rappelle que par construction, les méthodes de Newton-Côtes sont les formules de quadratures élémentaires de type

$$\int_0^1 P(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$$

telles que les noeuds $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ soient équidistants et centrés dans l'intervalle $[0,1]$, les λ_i étant choisis de telle façon que ces formules soient exactes pour tout polynôme P de degré inférieur ou égale à n. Montrer que si n est pair, ces formules sont aussi exactes pour les polynômes de degré $n+1$. *Indication: on pourra remarquer que $\lambda_i = \lambda_{n-i}$ et en tirer les conséquences pour les polynômes impaires.*

2. **Formules de Newton-Cotes ouvertes ou de Steffensen.** Construire les formules d'intégration numérique suivantes:

$$\int_{-1}^{1} \varphi(s)ds \simeq \varphi(-1/3) + \varphi(1/3), \text{ exacte si } \varphi \in \mathcal{P}_1;$$

$$\int_{-1}^{1} \varphi(s)ds \simeq \frac{2}{3}\left(2\varphi(-1/2) - \varphi(0) + 2\varphi(1/2)\right), \text{ exacte si } \varphi \in \mathcal{P}_3;$$

$$\int_{-1}^{1} \varphi(s)ds \simeq \frac{1}{12}\left(11\varphi(-3/5) + \varphi(-1/5) + \varphi(1/5) + 11\varphi(3/5)\right), \text{ exacte si } \varphi \in \mathcal{P}_3;$$

Déterminer leur noyau de Péano et en déduire l'erreur commise.

3. Construire les formules composées correspondants aux trois formules élémentaires de l'exercice 2 avec noeuds équidistants et donner l'expression de l'erreur commise.

4. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On considère la méthode d'intégration numérique approchée donnée par

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq f(-\omega) + f(\omega)$$

où $\omega \in [0,1]$

   (a) Calculer l'ordre de cette méthode en fonction de ω.

   (b) On se place dans le cas où cette méthode est d'ordre 1.

      i. Calculer le noyau de Péano $G_1(t)$ et tracer le graphe de G_1 pour $\omega = \frac{5}{8}$. Pour quelles valeurs de ω le noyau G_1 est-il de signe constant ?

      ii. Montrer que l'erreur $E(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx - f(-\omega) - f(\omega)$ vérifie une majoration

$$|E(f)| \leq C(\omega) \sup_{\xi \in [-1,1]} \left(|f''(\xi)|\right)$$

      où $C(\omega)$ est une constante dont on déterminera la valeur optimale
      - lorsque G_1 est de signe constant;
      - lorsque $\omega = \frac{5}{8}$.

5. On se donne une fonction ρ continue sur $]a,b[$ à valeurs dans $[0,+\infty[$ et telle que l'intégrale $\int_a^b \rho(x)\,dx$ soit convergente. On se donne aussi $n+1$ nombres $x_0, x_1, \ldots, x_n$ distincts de $[a,b]$ $(n \geq 1)$ et on pose

$$\Pi(x) \overset{\text{déf.}}{=} (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

On suppose

$$\int_a^b \rho(x)\,\Pi(x)\,x^k dx = 0 \qquad \text{pour tout } k = 0,1,\ldots,n-1 \tag{1}$$

On note enfin $l_0, l_1, \ldots, l_n$ les polynômes élémentaires de Lagrange associés à $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

(a) Montrer que pour tout $i \neq j$,

$$\int_a^b \rho(x)\, l_i(x)\, l_j(x)\, dx = 0 \tag{2}$$

(b) En déduire que

$$\sum_{i=0}^{n} \int_a^b \rho(x)\, l_i^2(x)\, dx = \int_a^b \rho(x)\, dx \tag{3}$$

(c) On se donne maintenant une fonction f continue sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On note p le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$ et q le polynôme de meilleure approximation uniforme sur $[a,b]$ de f dans l'espace des polynômes de degré au plus n noté dans la suite $\mathcal{P}_n$. On pose

$$d \overset{\text{déf.}}{=} \sup_{a \le x \le b} |f(x) - q(x)|$$

En utilisant (2) et (3), montrer que

$$\int_a^b \rho(x)\, [p(x) - q(x)]^2\, dx \le d^2 \int_a^b \rho(x)\, dx \tag{4}$$

(d) En déduire que

$$\int_a^b \rho(x)\, [f(x) - p(x)]^2\, dx \le 4d^2 \int_a^b \rho(x)\, dx \tag{5}$$

(e) Soit g une fonction continue sur $[-1,1]$ à valeurs réelles. On définit les points $x_0, x_1, \dots, x_n$ de $[-1,1]$ comme les racines du polynôme de Chebyshev défini sur $[-1,1]$ par

$$T_{n+1}(x) \overset{\text{déf.}}{=} \cos\left((n+1)\arccos(x)\right)$$

i. Montrer que pour tout $n \ge 0$, $T_{n+1}(X) \in \mathcal{P}_n^{\perp}$ pour le produit scalaire dans $L^2_{1/\sqrt{1-x^2}}(-1,1)$ défini par $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{-1}^{1} \varphi(x)\, \psi(x)\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

ii. On note r_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de g aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$. Montrer, en application des questions précédentes, que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} \frac{[g(x) - r_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$$

6. On cherche une formule de quadrature de type

$$\int_0^{\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-x} dx \simeq \lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) \tag{6}$$

(a) Vérifier que $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\infty} x^k \mathrm{e}^{-x} dx = k!$$

(b) Calculer la suite des polynômes orthogonaux pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{\infty} f(x)\, g(x)\, \mathrm{e}^{-x} dx$$

jusqu'au polynôme de degré 2.

(c) En déduire x_0 et x_1, puis λ_0 et λ_1, pour que la méthode soit d'ordre le plus élevé possible.

(d) Calculer l'ordre N de la méthode de quadrature élémentaire ainsi obtenue, ainsi que l'erreur commise dans (6) lorsque $f(x) = x^{N+1}$.

(e) Calculer G_N et montrer qu'il est toujours positif où nul (on s'aidera en partie de la figure 1).

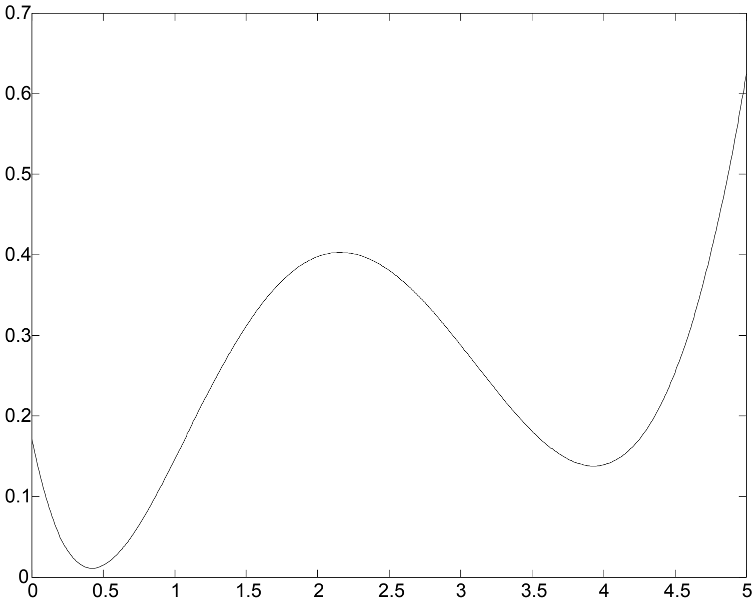

Figure 1: $6e^{-t} - 3 - 2\sqrt{2} + 3\,t + 3/2\,\sqrt{2}t - 3/2\,t^2 + 1/2\,t^3 - 1/4\,\sqrt{2}t^3$

(f) Donner une estimation de l'erreur lorsqu'on applique l'approximation (6) à une fonction *suffisamment régulière* (on précisera ce que signifie ici *suffisamment régulière*).

7. (a) Soit $P \in \mathcal{P}_5$ un polynôme de degré ≤ 5. Montrer que

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \frac{7}{15}P(-1) + \frac{16}{15}P(0) + \frac{7}{15}P(1) + \frac{1}{15}P'(-1) - \frac{1}{15}P'(1)$$

(b) Montrer que la formule précédente n'est pas nécessairement exacte pour les polynômes de degré 6 et en déduire l'ordre de cette méthode.

(c) On applique cette formule sur $f \in C^6_{I\!R}([-1,1])$ pour estimer $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. Montrer qu'il existe $\xi \in [-1,1]$ tel que l'erreur d'intégration s'écrive

$$E(f) = \frac{1}{4725} f^{(6)}(\xi)$$

(*Indication: on pourra considérer le polynôme P d'interpolation de Hermite simple de f aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$, i.e. tel que $f(x_i) = P(x_i)$ et $f'(x_i) = P'(x_i)$ pour $i = 0,1,2$*).

(d) Soit $G(t)$ le noyau associé à cette méthode.

i. Montrer que G est une fonction paire.

ii. Calculer G.

iii. Montrer que $G \geq 0$.

iv. Retrouver (c).

(e) Donner la formule de quadrature composée associée à cette formule de quadrature élémentaire.

8. Montrer que

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{b_0}{x} + b_1 + \frac{b_2}{2!}x + \cdots + \frac{b_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1} + o\left(x^{2n}\right)$$

(*Indication: appliquer la formule d'Euler-MacLaurin à* e^{-x} *entre* 0 *et* 1.).

9. (a) Montrer que si $f \in C^{\infty}_{I\!R}(I\!R)$ est une fonction périodique de période $b-a$, alors

$$\left| T_h(f) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq C_n(f;a,b)\,h^n$$

$\forall n \in I\!N$ et où $T_h(f)$ représente l'évaluation de la formule des trapèzes de pas h pour f sur $[a,b]$.

(b) Que pensez vous de l'utilisation de la méthode de Romberg pour une telle fonction ?

(c) Peut on utiliser formellement la méthode de Romberg pour estimer

$$\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^{9/2} dx$$

Si oui, que pensez vous de la convergence des approximations successives A_n^n ?
Si non, quelle méthode proposez vous (justifiez) ?

10. **Formule de Stirling.**

(a) En appliquant la formule d'Euler-MacLaurin à $f(x) = \ln(x)$ sur $[1, m[$, montrer que

$$m! = K\sqrt{m}\left(\frac{m}{\mathrm{e}}\right)^m \exp\left(\frac{1}{12m} - \frac{1}{360m^3} + \frac{1}{1260m^5} + O\left(\frac{1}{m^7}\right)\right)$$

(b) On pose

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m(x)\, dx \qquad m \in \mathbb{N}$$

i. Montrer que $I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$ si $m \geq 2$; calculer I_0, I_1 puis I_{2m} et I_{2m+1}

ii. Montrer que I_m est décroissante et que $I_{2m+1} \sim I_{2m}$.

iii. En déduire

$$\frac{(2m)!}{(m!)^2} \sim \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}$$

et la valeur de K.

11. **Méthode de Gauss-Legendre.** Décrire une méthode d'intégration sur $[-1, 1]$ qui soit exacte pour tout polynôme P de degré inférieur ou égale à $2n - 1$. Donner une estimation de l'erreur pour toute fonction $f \in C^{2n}([-1, 1])$. Donner la formule explicitement lorsque $n = 1, 2, 3$. Lorsque $n = 4, 5, \ldots$?.

12. **Méthode de Gauss-Laguerre.** Déterminer λ, μ, x et y pour que la formule d'intégration suivante

$$\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t} dt = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

soit exacte pour tous les polynômes jusqu'au degré le plus elevé possible.

13. On se propose d'étudier la formule approchée

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \int_{-1}^{1} P_n(x)dx$$

où $P_n(x)$ est le polynôme d'interpolation de degré n de f aux points de Chebychev $x_i = \cos\theta_i$ tels que $\theta_i = \frac{2i+1}{2n+2}\pi$, $0 \leq i \leq n$.

(a) Montrer que les polynômes de Lagrange l_i, $0 \leq i \leq n$ sont donnés par

$$l_i(x) = \frac{(-1)^i \sin\theta_i}{n+1} \frac{T_{n+1}(x)}{x - x_i}$$

où T_n désigne le polynôme de Chebyshev de degré n.

(b) Pour $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on note

$$a_n(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(n \arccos x) - \cos(n \arccos y)}{x - y} dy$$

Montrer que a_n est un polynôme de degré $n - 1$ et que l'on a

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

avec

$$\lambda_i = \frac{(-1)^i \sin\theta_i}{n+1} a_{n+1}(x_i)$$

(c) Calculer $a_{n+1}(x) + a_{n-1}(x)$; en déduire $a_{n+1}(x) - 2xa_n(x) + a_{n-1}(x)$ en fonction de la parité de n.

(d) Montrer que

$$\sin\theta \; a_n(\cos\theta) = 2\sin n\theta - 4 \sum_{1\leq q<\frac{n}{2}} \frac{1}{4q^2-1} \sin(n-2q)\theta$$

(e) En déduire que

$$\lambda_i = \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{1\leq q<\frac{n+1}{2}} \frac{1}{4q^2-1}\cos 2q\theta_i\right) > 0$$

14. Le but de ce problème est, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, de déterminer les coefficients $(\lambda_k)_{k=0\ldots n-1} \in \mathbb{R}^n$ et les noeuds $(x_k)_{k=0\ldots n-1} \in \mathbb{R}^n$ tels que si f est une fonction périodique de période 2π définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors la formule de quadrature à n noeuds

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx \simeq \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f(x_k)$$

soit exacte pour tous les polynômes trigonométriques jusqu'au degré m inclus, m étant le plus élevé possible. On dira dans ce cas que la formule est d'ordre m. On rappelle qu'un polynôme trigonométrique de degré m est une fonction de la forme

$$t_m(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m$ sont des réels, avec $(a_m, b_m) \neq (0, 0)$.

(a) Montrer qu'un polynôme trigonométrique de degré m peut aussi être défini de façon équivalente par

$$t_m(x) = \sum_{k=-m}^{m} \alpha_k \, \mathrm{e}^{ikx}$$

avec $\alpha_{-m}, \ldots, \alpha_m$ des nombres complexes tels que $\forall k \in \{-m, \ldots, m\}$, $\alpha_{-k} = \overline{\alpha_k}$, et $\alpha_m \neq 0$.

(b) Montrer que si $0 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < 2\pi$,

$$T(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{x - x_k}{2}\right)$$

est un polynôme trigonométrique de degré n. En déduire que la formule de quadrature à n noeuds ne pourra pas être d'ordre n.

(c) Soit η un reel fixé. Notons $h = \frac{2\pi}{n}$ et définissons

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_k = h \\ x_k = \eta + hk \end{array} \right. \qquad k = 0 \ldots n-1$$

Montrer que la formule de quadrature à n noeuds $x_0, \ldots x_{n-1}$ et de coefficients $\lambda_0, \ldots \lambda_{n-1}$ est exacte pour tout polynôme trigonométrique jusqu'au degré $n-1$.