UNIVERSITE DE BOURGOGNE
MM5: Analyse Numérique Elémentaire
Fiche de TD no 4

1. Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ aux points $\{-1, 0, 1, 2\}$.

   (a) Par la méthode de Lagrange

   (b) Par la méthode des différences divisées

   (c) Par la méthode des différences finies (cf. exercice 10)

   Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de la même fonction mais aux points $\{-1, -\frac{1}{2}, 0, 1, 2\}$; vous avez le choix de la méthode.

   N.B. Les polynômes d'interpolation calculés ci-dessus seront exprimés sous la forme classique d'une somme de monômes.

2. Soit $f \in C^1([a, b])$, on sait qu'il existe un polynôme p de degré $\leq 2n - 1$ et un seul tel que :

$$\begin{cases} p(x_1) = f(x_1) & , \quad p'(x_1) = f'(x_1) \\ p(x_2) = f(x_2) & , \quad p'(x_2) = f'(x_2) \\ \vdots & \quad\ \vdots \\ p(x_n) = f(x_n) & , \quad p'(x_n) = f'(x_n) \end{cases} \tag{1}$$

   où $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$.

   (a) Montrer que si l'on écrit p sous la forme

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x) f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} B_i(x) f'(x_i)$$

   les conditions (1) s'écrivent

$$\begin{cases} A_i(x_i) = 1 & ; \quad B_i(x_i) = 0 \\ A_i(x_j) = 0 \ , \ i \neq j & ; \quad B_i(x_j) = 0 \ , \ i \neq j \\ A_i'(x_i) = 0 & ; \quad B_i'(x_i) = 1 \\ A_i'(x_j) = 0 \ , \ i \neq j & ; \quad B_i'(x_j) = 0 \ , \ i \neq j. \end{cases} \tag{2}$$

   (b) En déduire l'expression de p suivante

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} [1 - 2(x - x_i) l_i'(x_i)] l_i^2(x) f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} (x - x_i) l_i^2(x) f'(x_i) \tag{3}$$

   où

$$l_i(x) = \prod_{k=1, k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

   (c) Prouver que si $f \in C^{2n}([a, b])$ alors

$$f(x) - p(x) = (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 \frac{f^{(2n)}(\zeta_x)}{(2n)!} \tag{4}$$

   où ζ_x appartient au plus petit intervalle fermé contenant $x, x_1, \ldots, x_n$.

3. **Analyse par perturbation de l'interpolation de Lagrange**. Soient $x_0, \ldots x_n$ $n + 1$ points dans $[a, b]$ et $(l_i(x))_{i=0\ldots n}$ les polynômes de Lagrange aux points $x_0, \ldots x_n$. Notons $\lambda_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)|$ et $\Lambda_n = \sup_{x\in[a,b]} \lambda_n(x) = \|\lambda_n\|_\infty$.

   (a) Posons $y_i = f(x_i)$ et $\widehat{y_i} = f(x_i) + \varepsilon_i$. Soient p_n et $\widehat{p_n}$ les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points (x_i, y_i) et $(x_i, \widehat{y_i})$ respectivement. Montrer que

$$\|p_n - \widehat{p_n}\|_\infty \leq \Lambda_n \max_{i=0\ldots n} (|\varepsilon_i|)$$

(b) Notons $E_n(f) = \inf_{q\in\mathcal{P}_n} \|f-q\|_\infty$. Montrer que

$$\|f-p_n\|_\infty \le (1+\Lambda_n)E_n(f)$$

(c) Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, notons $\mathcal{L}_n(f) = p_n$ son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_0, \dots x_n$. Montrer que

$$\Lambda_n = \max_{g\in\mathcal{C}^0([a,b]),\ g\neq 0} \frac{\|\mathcal{L}_n(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty}$$

(*Indication*: Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ telle que $\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty = \Lambda_n \|f\|_\infty$).

Λ_n s'appelle la **constante de Lebesgue** associée aux points $x_0, \dots x_n$.

4. Pour une subdivision $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ $(n \ge 2)$ on pose :

$$\Lambda(x) = \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)|$$

où $l_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$.

(a) Dessiner $\Lambda(x)$ pour $n=2$ en considérant la subdivision $-1<0<1$.

(b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Lambda(x) \ge 1$

(c) Montrer que sur l'intervalle $[x_{j-1}, x_j]$ on a :

$$\Lambda(x) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i l_i(x) \text{ avec } \varepsilon_i = \begin{cases} (-1)^{j-i+1} & \text{si } i \le j-1 \\ (-1)^{i-j} & \text{si } i \ge j. \end{cases}$$

(d) Prouver que la fonction $\Lambda(x)$ ne possède qu'un seul maximum local sur chaque intervalle $[x_{j-1}, x_j]$.

(e) Sur $[-1,1]$, on considère la subdivision $x_k = -1 + \frac{2k}{n}$ pour $k = 0, \dots, n$. On pose :

$$\Lambda_n = \sup_{[-1,1]} \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)|.$$

Montrer que

$$\Lambda_n \ge \frac{2^n}{4n^2}$$

Indication: On regardera ce qui se passe en $x = -1 + \frac{1}{n}$.

5. On se place sur un espace vectoriel X (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension n.

(a) Montrer que si $x_1, \dots, x_n$ sont indépendants dans X, et si $L_1, \dots, L_n$ sont indépendants dans $X^\star$, alors $\det((L_i(x_j)) \neq 0$.

(b) Réciproquement, si parmi les familles $x_1, \dots, x_n$ et $L_1, \dots, L_n$ une est indépendante, et si $\det((L_i(x_j)) \neq 0$, alors l'autre famille est indépendante.

(c) On se donne $L_1, \dots, L_n$ dans $X^\star$ et n nombres arbitraires $w_1, \dots, w_n$. On considère le problème suivant: trouver $x \in X$ tel que

$$L_i(x) = w_i \qquad i = 1, \dots, n.$$

Montrer que ce problème admet une solution pour tout choix des $w_1, \dots, w_n$ si et seulement si les L_i sont indépendants dans $X^\star$. Vérifier que dans ce cas la solution est unique. On dira que **la famille** $(L_1, \dots, L_n)$ **a la propriété d'interpolation**.

(d) Soit $X = \mathcal{P}_{2n+1}$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à $2n+1$. Soient α et β deux réels distincts. On définit les $2n+2$ formes linéaires $L_0, L_1, \dots, L_{2n+1}$ suivantes sur $\mathcal{P}_{2n+1}$:

$$\forall k = 0 \dots n \qquad \begin{cases} L_{2k}(P) = P^{(2k)}(\alpha) \\ L_{2k+1}(P) = P^{(2k)}(\beta) \end{cases}$$

(où $P^{(k)}$ désigne la $k^{ième}$ dérivée de P, et $P^{(0)} = P$).

i. Déterminer le polynôme de plus petit degré tel que si $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$,

$$\begin{array}{ll} P(0) = f(0) & P''(0) = f''(0) \\ P(2) = f(2) & P''(2) = f''(2) \end{array}$$

ii. Montrer que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_{2n+1})$ a la propriété d'interpolation.

(e) Montrer que la famille suivante

$$\begin{aligned} L_0\,(P) &= P(0) \\ L_1\,(P) &= P(1) \\ L_2\,(P) &= P'(\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

n'a pas la propriété d'interpolation.

(f) Examiner les exemples suivants :

i. $X = \mathcal{P}_n$, $L_0(f) = f(z_0)$, $L_1(f) = f(z_1)$, ..., $L_n(f) = f(z_n)$. On suppose que $z_i \neq z_j$ si $i \neq j$;

ii. **Abel-Gontscharoff interpolation.** $X = \mathcal{P}_n$, $L_0(f) = f(z_0)$, $L_1(f) = f'(z_1)$, $L_2(f) = f"(z_2)$,..., $L_n(f) = f^{(n)}(z_n)$;

iii. **Interpolation de Hermite simple.** $X = \mathcal{P}_{n+1}$,

$$\begin{array}{lcl} L_1(f) = f(z_1) & , & L_2(f) = f'(z_1) \\ L_3(f) = f(z_2) & , & L_4(f) = f'(z_2) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{2n-1}(f) = f(z_n) & , & L_{2n}(f) = f'(z_n) \qquad (z_i \neq z_j,\ i \neq j) \ ; \end{array}$$

iv. **Interpolation de Hermite.** $X = \mathcal{P}_N$, pour éviter les difficultés liées à l'indexation, on donne la liste des formes sans utiliser le symbole L :

$$\begin{array}{lclcl} f(z_0) & , & f'(z_0) & ,\ldots, & f^{(m_0)}(z_0) \\ f(z_1) & , & f'(z_1) & ,\ldots, & f^{(m_1)}(z_0) \\ \vdots & & & & \\ f(z_n) & , & f'(z_n) & ,\ldots, & f^{(m_n)}(z_0) \end{array}$$

$$(z_i \neq z_j,\ i \neq j,\ \text{et } N = m_0 + m_1 + \cdots + m_n + n) \ ;$$

v. **Interpolation trigonométrique**. Un combinaison linéaire de $1, \cos x, \ldots, \cos nx, \sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx$ est appelée "polynôme trigonométrique de degré $\leq n$". L'espace linéaire correspondant est noté $\mathcal{F}_n$. Quelle est sa dimension ? $X = \mathcal{F}_n$, $L_0(f) = f(x_0)$, $L_1(f) = f(x_1)$,..., $L_{2n}(f) = f(x_{2n})$, avec $-\pi \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} < \pi$.

6. Soit f une fonction continue sur $[-1, 1]$.

(a) Soit n un entier naturel non nul et $x_1, \ldots, x_n$ n nombres réels distincts compris entre -1 et 1. On pose

$$\pi_n\,(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

et

$$l_i\,(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

et on définit le polynôme p_n par

$$\begin{aligned} p_n &\in \mathcal{P}_{2n-1} \\ p_n\,(x_i) &= f\,(x_i) \ \text{ et} \\ p_n'\,(x_i) &= 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

i. Justifier l'existence et l'unicité de p_n.

ii. Exprimer $l_i(x)$ en fonction de $\pi_n(x)$ et de $\pi_n'(x_i)$.

iii. Vérifier que

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\, f(x_i)$$
$$\text{où } F_i(x) = \left(1 - \frac{\pi_n''(x_i)}{\pi_n'(x_i)}(x - x_i)\right) l_i(x)^2$$

(Indication: On pourra exprimer $\pi_n(x)$ en fonction de $\pi_n'(x_i)$ et de $l_i(x)$ d'après la question précédente puis dériver deux fois pour obtenir une expression simple de $\pi_n''(x_i)$)

(b) On définit sur $[-1,1]$ le polynôme de Chébyshev de degré n par $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. On rappelle que T_n est un polynôme de degré n, de zéros $\cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)$ pour $i = 1, \ldots, n$ et dont le coefficient dominant est 2^{n-1}. A partir de maintenant, les points x_i désigneront les zéros de T_n.

i. Établir les égalités suivantes:

$$l_i(x) = \frac{(-1)^{i-1}\sqrt{1 - x_i^2}}{n}\,\frac{T_n(x)}{x - x_i}$$
$$F_i(x) = (1 - x\, x_i)\left(\frac{T_n(x)}{n(x - x_i)}\right)^2$$

ii. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(x) = 1$$

et en déduire que sur $[-1,1]$

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x) - f(x_i)|\, F_i(x)$$

(c) Soit $\epsilon > 0$. La fonction f étant uniformément continue sur le compact $[-1,1]$, on introduit $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, x' \in [-1,1] \quad |x - x'| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leq \epsilon$$

Pour un $x \in [-1,1]$ fixé, on pose $J_{x,\epsilon} = \{i \in \{1, \ldots, n\} \;/\; |x - x_i| \leq \eta\}$ et on note $K_{x,\epsilon} = \{1, \ldots, n\} - J_{x,\epsilon}$.

i. Montrer que

$$\sum_{i \in J_{x,\epsilon}} |f(x) - f(x_i)|\, F_i(x) \leq \epsilon$$

ii. Montrer que

$$\sum_{i \in K_{x,\epsilon}} |f(x) - f(x_i)|\, F_i(x) \leq 4\frac{\|f\|_\infty}{n\,\eta^2}$$

iii. Que peut-on en conclure sur la convergence de la suite des polynômes $(P_n)_{n\geq 1}$?

7. On note $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ les racines $n^{ième}$ de l'unité :

$$\alpha_k = \exp\frac{2i\pi k}{n} \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

(a) Montrer que tout polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$, avec $\deg(p) \leq n-1$, peut s'écrire :

$$p(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k p(\alpha_k)\frac{z^n - 1}{z - \alpha_k}.$$

(b) Soit maintenant $p \in \mathbb{C}[X]$, avec $\deg(p) = n-1$. On note λ le coefficient de z^{n-1} dans $p(z)$. On suppose de plus qu'on a $|p(z)| \leq 1$ pour tout z de module 1. Montrer que l'on a $|\lambda| \leq 1$ et que, si $|\lambda| = 1$ alors $p(z) = \lambda z^{n-1}$.

8. On considère $n+1$ points distincts de $[a,b]$ et f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)}.$$

9. **Différences finies.** Soit (y_k) une suite réelle (ou complexe), on définit par récurrence $\Delta^n y_k$:

$$\Delta^{n+1} y_k = \Delta(\Delta^n y_k) = \Delta^n y_{k+1} - \Delta^n y_k \tag{5}$$

avec $\Delta^0 y_k = y_k$.

(a) Donner les expressions de $\Delta^1 y_k$, $\Delta^2 y_k$, $\Delta^3 y_k$. Montrer que

$$\Delta^n y_k = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} C_n^r y_{k+r}. \tag{6}$$

Que vaut $\Delta^n y_0$?

(b) On interpole l'application f en des points équidistants $x_0 = a$, $x_1 = a+h$, $\dots$, $x_n = a+nh$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

i. Prouver que $f[x_0, \dots, x_n] = \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}$ où $y_j = f(a+jh)$ (on pourra utiliser l'exercice précédent).

ii. En déduire l'expression, à l'aide de différences finies, du polynôme de degré $\leq n$ qui interpole f en $x_0, \dots, x_n$. **Remarque** : si f est de classe C^n sur $[x_0, x_n]$, il existe $\zeta \in]x_0, x_n[$ tel que $f^{(n)}(\zeta) = \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n}$

10. Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et soit $0 < \alpha < R$.

(a) Trouver une majoration de $\sup_{x \in [-\alpha, \alpha]} |f^{(n+1)}(x)|$.

(b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne une suite de $n+1$ points distincts $x_{i,n} \in [-\alpha, \alpha]$ distincts deux à deux, et on note p_n le polynôme d'interpolation de f en ces points.

i. Trouver une condition suffisante sur R pour que (p_n) converge uniformément vers f sur $[-\alpha, \alpha]$.

ii. Donner des exemples.

11. **Polynômes de Legendre.** Considérons la famille de polynômes définis par

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[\left(x^2 - 1\right)^n \right]$$

(a) Montrer les propriétés suivantes

i.

$$L_n \in \mathcal{P}_n \text{ et } < L_n, L_m >_{L^2(-1,1)} = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$$

ii.

$$L_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n + \cdots$$

iii.

$$L_n(1) = 1, \; L_n(-1) = (-1)^n$$

$$L_n \text{ est pair pour } n \text{ pair et impair pour } n \text{ impair}$$

iv.

$$nL_n(x) = (2n-1)xL_{n-1}(x) - (n-1)L_{n-2}(x)$$

v.

$$L'_n(x) = xL'_{n-1}(x) + nL_{n-1}(x)$$

$$L'_n(x) - L'_{n-2}(x) = (2n-1)L_{n-1}(x)$$

$$(x^2-1)L'_n(x) = n\left(xL_n(x) - L_{n-1}(x)\right)$$

(b) Montrer que les polynômes orthogonaux par rapport à la fonction de poids $w(x) = \sqrt{x}$ (respectivement $\frac{1}{\sqrt{x}}$) sur $]0,1[$ sont $q_n(x) = \frac{L_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ (respectivement $q_n(x) = L_{2n}(\sqrt{x})$).

12. On se donne un intervalle $[a,b]$ et une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $n \geq 2$ un entier et notons $(x_i)_{i=0\ldots n}$ la subdivision de pas $h = \frac{b-a}{n}$ de $[a,b]$, i.e. $\forall i \in \{0,1,\ldots,n\}$, $x_i = a + h\,i$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une unique fonction $\mathcal{S}$ telle que

(i) $\mathcal{S}$ est de classe C^2 sur $[a,b]$,

(ii) $\forall i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, la restriction de $\mathcal{S}$ à $[x_i,x_{i+1}]$ est un polynôme de degré ≤ 3 qui sera noté $\mathcal{S}(x) = P_i(x) = \alpha_i\,(x-x_i)^3 + \beta_i\,(x-x_i)^2 + \gamma_i\,(x-x_i) + \delta_i$ sur $[x_i,x_{i+1}]$,

(iii) $\forall i \in \{0,1,\ldots,n\}$, $\mathcal{S}(x_i) = f(x_i)$,

(iv) $\mathcal{S}'(a) = f'(a)$ et $\mathcal{S}'(b) = f'(b)$.

(a) Montrer que si $\mathcal{S}$ vérifie les trois premières conditions *(i)*, *(ii)*, et *(iii)*, alors les coefficients $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ s'expriment en fonction de h et des $f(x_j)$ et $\mathcal{S}''(x_j) = z_j$, $j = 0\ldots n$.

(b) Prouver que si $\mathcal{S}$ vérifie les quatre conditions *(i)*, *(ii)*, *(iii)* et *(iv)* alors le vecteur z est solution d'un système linéaire $A\,z = v$ où

$$z = \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}''(x_0) \\ \vdots \\ \mathcal{S}''(x_n) \end{pmatrix}$$

et où la matrice tridiagonale A et le vecteur v sont à déterminer.

(c) Montrer qu'il existe une et une seule fonction $\mathcal{S}$ vérifiant les quatre propriétés *(i)* à *(iv)*.

13. **Problème.** Supposons les points d'interpolation de Lagrange équidistants sur $[0,b]$ et notons $y = \frac{nx}{b}$. Le but de cet exercice est d'étudier l'erreur d'interpolation dans le cas de points équidistants.

(a) Montrer que

$$\exists \xi \in [0,b] \quad f(x) - p_n(x) = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!n^{n+1}}y(y-1)(y-2)\cdots(y-n)f^{(n+1)}(\xi)$$

(On va donc étudier la fonction $h(y) = |y(y-1)\cdots(y-n)|$)

(b) Montrer que h atteint son maximum en un point $y_n \in]0,\frac{1}{2}[$ et que $y_n \sim \frac{1}{\ln(n)}$ quand n tend vers $+\infty$ (Indication: calculer $\frac{h'(y)}{h(y)}$). En déduire que

$$\exists C_1 > 0 \quad \forall n > 1 \qquad h(y_n) \leq \frac{C_1 n!}{\ln(n)}$$

(on peut prendre $C_1 = 1$)

(c) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \left(h\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) \frac{\ln(n)}{n!} \right) = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

et en déduire que

$$\exists C_2 > 0 \quad \forall n > 1 \qquad h(y_n) \geq \frac{C_2 n!}{\ln(n)}$$

(on peut prendre $C_2 = \frac{1}{3}$)

(d) Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(n+1)$ points équidistants sur l'intervalle $[0,b]$ avec $x_0 = 0$ et $x_n = b$. Montrer que

$$\exists C > 0 \quad \forall n > 1 \qquad \max_{x\in[0,b]} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| \leq \frac{C\exp(-n)}{\sqrt{n}\ln(n)} b^{n+1}$$