UNIVERSITE DE BOURGOGNE

MM5: Analyse Numérique Elémentaire

Fiche de TD no 3

1. Soit $F : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application (J intervalle ouvert). On suppose qu'il existe $x^\star \in J$ tel que $F(x^\star) = x^\star$ ($x^\star$ est un **point fixe** de F) et que F est dérivable en $x^\star$ avec $|F'(x^\star)| < 1$.

   (a) Montrer qu'il existe un voisinage de $x^\star$, $\mathcal{V}$, tel que pour tout $x_0 \in \mathcal{V}$, les itérations $x_{n+1} = F(x_n)$ converge vers $x^\star$ (on dit que $x^\star$ est un **point fixe attractif**).

   (b) Prouver que dès que $x_0 \in \mathcal{V}$
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^\star}{x_n - x^*} = F'(x^\star)$$
   ($x_n \neq x^\star$ à partir d'un certain rang).

   (c) Que se passe-t-il si, en supposant F suffisamment différentiable au voisinage de $x^\star$, on a de plus :
   $$F'(x^\star) = \cdots = F^{(r-1)}(x^\star) = 0 \text{ et } F^{(r)}(x^\star) \neq 0 \text{ ?}$$

   (d) On pose $e_n = -log_{10}|x_n - x_\star|$. Que représente e_n ? Donner une expression approchée de e_{n+1} à l'aide de e_n. Quelles conséquences pouvez-vous en tirer ?

2. Résoudre l'équation
   $$x^3 + x = 1000 \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{1}$$
   (on pourra mettre (1) sous une autre forme...).

3. (a) Dans la méthode des approximations successives appliquée à $\varphi : [a, b] \to [a, b]$ dérivable avec $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ pour tout $x \in [a, b]$, est-il vrai que si x_{n+1} et x_n concident avec un précision ϵ donnée, il en est de même de x_n et du point fixe ζ ? (on pourra tout d'abord prouver que $|\zeta - x_n| \leq \frac{|x_{n+1}-x_n|}{1-q}$). Quelle conclusion en tirez-vous quant à l'arrêt des itérations ?

   (b) Chercher les racines réelles de l'équation $x - \sin x = 0,25$ avec trois chiffres significatifs exacts.

4. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, continue, telle que :
   $$f(x) = x(1 - ax^\alpha \varphi(x))$$
   où $a > 0$, $\alpha > 0$, et $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = 1$.

   (a) Prouver que pour u_0 assez petit, la suite (u_n) définie par u_0 et la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, tend vers 0 en décroissant.

   (b) Prouver que :
   $$u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha} \sim a\alpha$$
   quand $n \to \infty$. En déduire un équivalent de u_n.

   (c) On pourra donner des équivalents de $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$, $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \ln(1 + v_n)$.

5. **Le procédé Δ^2 d'Aitken**. Considérons la suite définie par $x_{n+1} = ax_n + b$, x_0 donné, a et b fixés. On suppose $a \neq 1$, et on pose :
   $$y_n = \frac{x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}. \tag{2}$$

   (a) Que vaut en fait y_n ?

   (b) On considère à présent un suite (x_n) qui vérifie
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - l}{x_n - l} = a \tag{3}$$
   avec $|a| < 1$. Que peut-on dire de (x_n) ?

(c) On pose $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, $\Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n$. Vérifier que

$$y_n = \frac{x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}.$$

(d) Prouver que $y_n \to l$ et $\frac{y_n - l}{x_n - l} \to 0$ quand n tend vers l'infini (on introduira les erreurs $\epsilon_n = y_n - l$ et $e_n = x_n - l$).

6. Soit $\lambda > 0$, on veut résoudre en x l'équation suivante

$$x = \lambda \mathrm{e}^x \tag{4}$$

(a) Discuter du nombre de racines de (4) suivant les valeurs de λ.

(b) Dans le cas où (4) admet deux racines positives $r_1 < r_2$, on se propose d'approcher numériquement r_1 et r_2 à l'aide des méthodes suivantes. Etant donnée une valeur x, on calcule

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & x_{n+1} = \lambda \mathrm{e}^{x_n} \\ \text{(ii)} & x_{n+1} = \ln(x_n) - \ln(\lambda) \end{array}$$

Montrer que la récurrence si $x_0 \approx r_1$, la suite (i) converge vers r_1 et que si $x_0 \approx r_2$ alors la suite (ii) converge vers r_2.

7. On veut résoudre numériquement en w (dans $\mathbb{R}$)

$$w\mathrm{e}^w = x \tag{5}$$

Etudier les solutions de (5) en fonction de x et discuter de la pertinence de la méthode de Newton pour calculer $w(x)$ lorsque cette équation admet une unique solution.

8. **Méthode des approximations de Picard.** Ecrivons une équation différentielle

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= \eta \end{aligned}$$

sous sa forme intégrale

$$x(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

On considère la métode itérative suivante pour approximer la solution:

$$\begin{cases} x^{[0]}(t) = \eta \\ x^{[n+1]}(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} f(s, x^{[n]}(s))ds \end{cases}$$

(a) Calculer $x^{[3]}$ lorsque $f(t,x) = t + x^2$, $t_0 = 0$ et $x(0) = 0$. Comparer le résultat obtenu à $t = 0.3$ avec cette méthode et celui obtenu par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec pas adaptatif qui donne $x(0.3) \simeq 0.04512191161$ (valeur que l'on peut considérer comme très précise, comme on le verra ultérieurement en cours).

(b) Montrer que si $f(t,x)$ est bornée et satisfait une condition de Lipschitz, alors la suite $x^{[n]}$ des approximations de Picard converge vers la solution exacte de l'équation differentielle.