UNIVERSITE DE BOURGOGNE
MM5: Analyse Numérique Elémentaire
Fiche de TD no 2

1. Que peut-on dire d'une méthode itérative dont la matrice a un rayon spectral nul ?

2. Etudier les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel pour les systèmes $Ax = b$ dans le cas des matrices $A$ suivantes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}$$

3. Montrer que la méthode de Gauss-Seidel est convergente dans le cas d'un système linéaire $Ax = b$ avec $A$ une matrice à diagonale strictement dominante.

4. Soit $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}^n$ et $A$, $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose : si $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$, $x \leq y$ si et seulement si $x_i \leq y_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, et, si $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, $A \leq B$ si et seulement si $a_{i,j} \leq b_{i,j}$ pour tout $i$ tout $j$. On pose aussi $|x| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)^T$, $|A| = (|a_{i,j}|)$. On dira que $A$ est positive si $0 \leq A$ (i.e $a_{i,j} \geq 0$ pour tout $i$, tout $j$).

   (a) Montrer que si $x \leq y$ et $A \geq 0$, alors $Ax \leq Ay$.

   (b) Soit $B \geq 0$.

      i. Montrer que si $\rho(B) < 1$, $(I - B)^{-1}$ existe et est positive.

      ii. Réciproquement, en considérant une valeur propre $\lambda$ quelconque de $B$, prouver que si $(I-B)^{-1} \geq 0$ alors $\rho(B) < 1$.

   Soient $A$, $B$, $C$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que $A = B - C$ est un éclatement régulier de $A$ si $C \geq 0$ et si $B$ est inversible avec $B^{-1} \geq 0$.

   (c) On suppose $A$ inversible, $A^{-1} \geq 0$ et $A = B - C$ un éclatement régulier.

      i. On pose $H = B^{-1}C$. En utilisant les relations $(I + H + \cdots + H^m)(I - H) = I - H^{m+1}$ et $B^{-1} = (I - H)A^{-1}$, prouver que

$$O \leq (I + H + \cdots + H^m)B^{-1} = (I - H^{m+1})A^{-1} \leq A^{-1}$$

      pour tout entier $m \geq 0$.

      ii. En déduire que $\rho(B^{-1}C) < 1$, puis que les itérations $x^{k+1} = B^{-1}Cx^k + B^{-1}b$ convergent vers $A^{-1}b$ pour tout choix de $x^0$.

   (d) Soit $A$ inversible telle que $A^{-1} \geq 0$ et $a_{i,j} \leq 0$ dès que $i \neq j$. Montrer que la méthode de Gauss-Seidel pour résoudre le système $Ax = b$ converge (on vérifiera tout d'abord que $a_{i,i} > 0$ pour tout $i = 1, \ldots n$).

5. (a) Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels, on considère la matrice $n \times n$ (pour $n \geq 2$) $A(\alpha, \beta) = (a_{ij})$ définie par

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \begin{cases} a_{ij} = \alpha & \text{si } i \neq j \\ a_{ii} = \beta & \text{sinon.} \end{cases}$$

   On note $I$ la matrice identité d'ordre $n$.

      i. Montrer que le déterminant de $A(\alpha, \beta)$ est égal à

$$\Delta(\alpha, \beta) = (\beta + (n-1)\alpha)(\beta - \alpha)^{n-1}$$

      ii. Donner l'expression du polynôme caractéristique de $A(\alpha, \beta)$ que l'on notera $P_{(\alpha,\beta)}(\lambda)$.

   (b) On suppose dans tout le reste de l'exercice que $A(\alpha, \beta)$ est inversible. Résoudre le système $A(\alpha, \beta)x = b$ dans les deux cas suivants:

      i. toutes les composantes de $b$ valent 1.

      ii. $b$ est un vecteur quelconque

   (c) On suppose que $\beta \neq 0$ et on applique la méthode de Jacobi au système $A(\alpha, \beta)x = b$.

i. Calculer la matrice d'itération $B_J$ intervenant dans la méthode de Jacobi.
ii. Quel est le rayon spectral de $B_J$ ?
iii. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice $A(\alpha, \beta)$ pour que la méthode de Jacobi converge.
iv. Montrer que si la méthode de Jacobi converge, alors celle de Gauss-Seidel converge aussi.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive dont les valeurs propres sont notées $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. On considère l'application $J$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$J(v) = \frac{1}{2} v^{\mathrm{T}} A v - b^{\mathrm{T}} v$$

où $b$ est un vecteur fixé. On note $x$ l'unique solution du système linéaire $Ax = b$.

(a) i. Montrer que

$$\inf_{v \in \mathbb{R}^n} J(v) = J(x)$$

ii. Quelles conditions doivent satisfaire $M$ et sa transposée pour que ce résultat reste valable lorqu'on ne suppose plus la matrice symétrique définie positive.

(b) On considère la méthode itérative suivante pour la résolution du système linéaire $Ax = b$:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \omega (A x_k - b) \\ x_0 &= \eta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où $\omega$ est un paramètre strictement positif.

i. Cette méthode est-elle adaptée au problème ?
ii. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode soit convergente.
iii. Montrer que l'on peut choisir un $\omega$ optimal, pour lequel on donnera une majoration de l'erreur $\|x - x_k\|_2$.

7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive de la forme $A = I - L - U$ où $L$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale nulle (et $U^T = L$). Pour $b$ donné dans $\mathbb{R}^n$, on cherche à résoudre

$$Ax = b$$

à l'aide de la méthode itérative suivante, $x^{(0)}$ étant donné dans $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} (I - L) x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} &= U x^{(k)} + b \\ (I - U) x^{(k+1)} &= L x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} + b \end{aligned}$$

(a) Mettre la méthode précédente sous la forme

$$x^{(k+1)} = B_d x^{(k)} + c$$

et expliciter $B_d$ et $c$.

(b) On pose $B = (I - L)(I - U)$ et $C = LU$. Démontrer que $A = B - C$ est un éclatement P-régulier de $A$.

(c) En déduire que la méthode présentée est convergente.

8. Soient $A_1$ et $A_2$ deux matrices définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *i.e.*

$$x^T A_1 x > 0 \text{ et } x^T A_2 x > 0 \text{ pour tout } x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$$

Pour $b$ donné, on veut résoudre le système

$$(A_1 + A_2) x = b \tag{1}$$

(a) Montrer que (1) admet une solution unique.

(b) Soit $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs. On considère la méthode itérative suivante, $x^{(0)}$ étant donné dans $\mathbb{R}^n$

$$(A_1 + r_k I)\, x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} = (r_k I - A_2)\, x^{(k)} + b \tag{2}$$
$$(A_2 + r_k I)\, x^{(k+1)} = (r_k I - A_1)\, x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} + b \tag{3}$$

On pose $\varepsilon_k = x^{(k)} - x$. Montrer que l'on a

$$\varepsilon_k = \left(\prod_{j=0}^{k-1} T(r_j)\right) \varepsilon_0 \tag{4}$$

où $T(r_j)$ est une matrice à déterminer.

(c) On suppose maintenant que $\forall k,\ r_k = r$. On pose

$$\widetilde{T}(r) = (A_2 + rI)\, T(r)\, (A_2 + rI)^{-1}$$

i. Trouver une relation entre $(T(r))^k$ et $\left(\widetilde{T}(r)\right)^k$.

ii. Montrer que

$$\widetilde{T}(r) = (rI - A_1)(rI + A_1)^{-1}(rI - A_2)(rI + A_2)^{-1} \tag{5}$$

iii. Montrer que

$$\rho\left(\widetilde{T}(r)\right) = \rho(T(r)) \tag{6}$$

(d) On suppose que les matrices $A_1$ et $A_2$ sont symétriques et on note $\lambda_i^{(1)}$ et $\lambda_i^{(2)}$ leurs valeurs propres respectives.

i. Déterminer les valeurs propres de $(rI - A_1)(rI + A_1)^{-1}$.

ii. Montrer que l'on a

$$\rho(T(r)) \le \max_{i=1,\dots,n} \left|\frac{r - \lambda_i^{(1)}}{r + \lambda_i^{(1)}}\right| \times \max_{i=1,\dots,n} \left|\frac{r - \lambda_i^{(2)}}{r + \lambda_i^{(2)}}\right| < 1 \tag{7}$$

iii. En déduire un choix *optimum* du paramètre $r$.

9. **Exercice corrigé.** Soit $A$ une matrice symétrique définie positive de dimension $n$. Nous allons nous intéresser à la diagonalisation de $A$ par la méthode de Gauss.

(a) Montrer que le pivot maximal $\beta \overset{\text{def}}{=} \max_{1\le i,j\le n} |A_{ij}|$ est nécessairement sur la diagonale et qu'il correspond à une composante positive, i.e.

$$\beta = \max_{1\le i\le n} (A_{ii})$$

(b) Soit $P$ la matrice de permutation qui amène le pivot maximal en $1^{\grave{e}re}$ ligne et $1^{\grave{e}re}$ colonne, i.e.

$$PAP^T = \begin{pmatrix} \beta & b^T \\ b & B \end{pmatrix}$$

où $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $B \in M_{n-1}(\mathbb{R})$.

i. Montrer qu'une itération de Gauss revient à faire le calcul suivant

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & b^T \\ b & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l^T \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

où $l$ est un vecteur de dimension $n-1$ que l'on determinera.

ii. Exprimer $M$ en fonction de $B$ et de $\beta$.

(c) Montrer que $M$ est symétrique définie positive.

(d) En déduire que $\max_{1\leq i,j\leq n} |M_{ij}| \leq \beta$.

(e) En conclure que dans la méthode de Gauss de diagonalisation d'une matrice symétrique définie positive, la suite des pivots est décroissante minorée par 0..

(f) Quel est l'intérêt de permutter lignes et colonnes et quel type de décomposition de $A$ obtient-on si on s'interdit toute permutation.

*Correction.*

(a) *Supposons qu'il soit en dehors de la diagonale, par exemple égal à* $|A_{ij}| = |A_{ji}| = \varepsilon A_{ij}$,

$$\begin{aligned}(e_i - \varepsilon e_j)^T A (e_i - \varepsilon e_j) \quad &= A_{ii} - \varepsilon A_{ji} - \varepsilon A_{ji} + A_{jj} \\ &= (A_{ii} - |A_{ij}|) + (A_{jj} - |A_{ij}|) < 0\end{aligned}$$

*ce qui est une contradiction avec* $A$ *symétrique définie positive. Le pivot est sur la diagonale et correspond évidemment avec un coefficient positif puisque* $A_{ii} = e_i^T A e_i > 0$

i. *Une itération de Gauss consiste à faire apparaitre des* 0 *sur la 1ère ligne et la 1ère colonne en dehors de la diagonale. Faire apparaitre des* 0 *sur la première ligne revient à retrancher à chacune des colonnes* 2 *à* $n$ *la première colonne multipliée par un facteur adéquat, ce qui se traduit matriciellement par une multiplication à droite, i.e.*

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -c_{12}/c_{11} & \cdots & -c_{1n}/c_{11} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & \widetilde{c}_{22} & \cdots & \widetilde{c}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \widetilde{c}_{n2} & \cdots & \widetilde{c}_{nn} \end{pmatrix}$$

*et on fait apparaitre de même des* 0 *sur la première colonne en multipliant à gauche. Si on effectue le calcul bloc par bloc:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & b^T \\ b & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l^T \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & \beta l^T + b^T \\ b & bl^T + B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta & \beta l^T + b^T \\ \beta l + b & \beta l l^T + l b^T + b l^T + B \end{pmatrix}$$

*et donc* $\beta l + b = 0$ *donne* $l = -\frac{1}{\beta} b$.

ii. *Il vient du calcul précédent, en remplaçant* $l$ *par son expression en fonction de* $\beta$ *et de* $b$

$$M = B + \beta \left(-\frac{1}{\beta} b\right) \left(-\frac{1}{\beta} b^T\right) - \frac{1}{\beta} b b^T + b \left(-\frac{1}{\beta} b^T\right)$$

*soit*

$$M = B - \frac{1}{\beta} b b^T$$

(b) *Soit* $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ *non nul et vérifions que* $\xi^T M \xi > 0$. *On forme* $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix}$ *et:*

$$\xi^T M \xi = x^T \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} x = x^T L P A P^T L^T x = \left(P^T L^T x\right)^T A \left(P^T L^T x\right) > 0$$

*en notant* $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & I \end{pmatrix}$, *et ceci car* $A$ *est symétrique définie positive et* $P^T L^T x \neq 0$ *puisque* $P$ *et* $L$ *sont inversibles et* $x \neq 0$.

(c) *D'après la première question,* $M$ *étant symétrique définie positive,* $\max_{1\leq i,j\leq n} |M_{ij}| = M_{kk}$ *pour un certain* $k$ *entre* 1 *et* $n-1$. *Mais*

$$0 < M_{kk} = e_k^T M e_k = e_k^T B e_k - \frac{1}{\beta} \left(e_k^T b\right) \left(b^T e_k\right) = B_{kk} - \frac{1}{\beta} b_k^2 \leq B_{kk} \leq \beta$$

*puisque* $\beta$ *est le pivot maximal de* $PAP^T$.

(d) *Ce que l'on vient de faire est la première étape d'une récurrence, faisant intervenir des matrices symétriques définies positives de dimensions $n$, $n-1$, ...; 1 et on a vu que le pivot de la matrice de dimension $n-k$ est plus petit ou égal à celui de la matrice de dimension $n-k+1$, et toujours positif puisque les matrices sont symétriques définies positives, d'où la conclusion*

(e) *L'intérêt de permutter lignes et colonnes est evidemment numérique car cela permet de choisir a tout moment le pivot le plus grand et donc de minimiser l'effet des erreurs de calcul. Si on s'interdit ce type de permutation, on voit qu'à chaque étape, on multiplie $A$ à gauche par une matrice triangulaire inférieure et à droite par sa transposée donc on aura à la fin de la récurrence*

$$D = LAL^T$$

*où $L$ est triangulaire inférieure et $D$ diagonnale, soit encore, en posant $\overline{L} = L^{-1}$*

$$A = \overline{L}D\overline{L}^T$$

*et donc $\overline{L}$ et $D\overline{L}^T$ est la décomposition LU de $A$ et $\overline{L}\sqrt{D}$ et $\sqrt{D}\overline{L}^T$ est sa décomposition de Cholesky.*

10. **Thème d'étude.** L'ensemble des résultats suivants constitue le théorème de Perron-Frobénius. Une matrice $A$ est dite décomposable si par définition il existe une matrice de permutation $P$ telle que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

où $B$ et $D$ sont des matrices carrées de dimension non nulle. Dans le cas contraire, $A$ est dite indécomposable. Pour toute matrices ou vecteurs $A$ et $B$, on notera $A \geq B$ (resp. $>$, $<$, $\cdots$) si tous les coefficients de la matrice ou du vecteur $A$ sont $\geq$ (resp. $>$, $<$, $\cdots$) à ceux de $B$.

(a) Soit $A \geq 0$ une matrice de dimension $n$. On note $\mathcal{G}$ le graphe de sommets $\{1, 2, \ldots, n\}$ et dont les arcs orientés sont les couples $(i, j)$ tels que $a_{ij} > 0$. Montrer qu'il existe un chemin de longueur $\leq l$ reliant $i_0$ à $j_0$ si et seulement si le coefficient $a_{ij}^{(l)}$ de $A^l$ est $> 0$.

(b) Soit $A \geq 0$ une matrice indécomposable de dimension $n$. Déduire de (a) que

$$(I + A)^{n-1} > 0$$

(c) Posons

$$r_x = \min_{i=1,\ldots,n} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j}{x_i} \right\}$$

et

$$r = \sup \{r_x; \quad x \geq 0, x \neq 0\}$$

Montrer que $r$ est valeur propre de $A$. Montrer qu'il lui correspond un vecteur propre $u > 0$.

(d) Montrer que le rayon spectral de $A$ est $r$.

(e) Montrer que si $A \leq B$ et $A \neq B$ alors $\rho(A) < \rho(B)$.

(f) Montrer que $\rho(A)$ est la seule valeur propre ayant un vecteur propre $\geq 0$.

(g) Montrer que $\rho(A)$ est une valeur propre simple de $A$.

(h) Soit $A$ une matrice positive. Montrer que $\rho(A)$ est valeur propre de $A$ et qu'il lui corespond un vecteur propre $u \geq 0$.