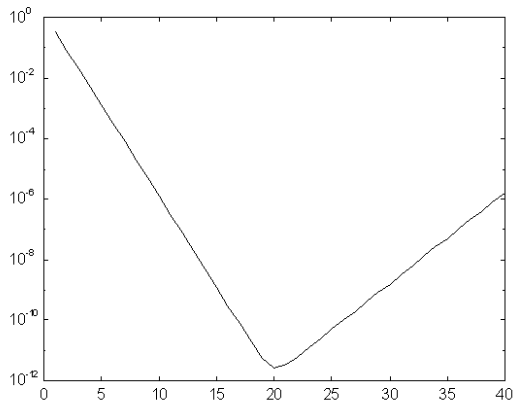
UNIVERSITE DE BOURGOGNE
MM5: Analyse Numérique Elémentaire
Fiche de TD no 1

1. *Cet exercice et les deux suivants servent à montrer les problèmes numériques que l'on peut constater quand on implémente effectivement un schéma algorithmique.*

   On considère la suite
   $$x_{k+1} = 2,25x_k - 0,5x_{k-1}$$
   où $x_1 = \frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{1}{12}$.

   A l'aide d'un ordinateur on trace sur une echelle logarithmique la graphe de $k \mapsto x_k$ et on obtient le résultat de la figure çi-dessous. Pouvez-vous expliquer ce phénomène ? (**indication** : donner l'expression de x_k en fonction de k, puis celle de toutes les suites vérifiant la récurence. Regarder ce qui se passe si on perturbe les conditions initiales ($x_1 = \frac{1}{3}(4^0 + 2^{-56})$, $x_2 = \frac{1}{3}(4^{-1} + 2^{-55})$)

   Calcul de la suite $x_{k+1} = 2,25x_k - 0,5x_{k-1}$

2. Soit $(I_n)_{n\geq 0}$ la suite d'intégrales :
   $$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{6 + x - x^2} dx.$$

   (a) Montrer que (I_n) vérifie une relation de récurrence de la forme
   $$(\star) \qquad I_{n+1} = \alpha I_n + \beta I_{n-1} + c_n$$
   où α, β sont des constantes et $(c_n)_{n\geq 0}$ une suite que l'on déterminera.

   (b) Est-il possible de calculer I_{50} à l'aide de $(\star)$ avec un ordinateur donnant une précision relative de 10^{-10} ?

3. Un banquier vous propose le placement suivant: vous faites un versement initial de $(e-1)^F$ et votre capital la n^ième^ année est égal à n fois votre capital de l'année précédente moins 1^F pour frais de gestion. Un simulation sur l'ordinateur de la banque vous prédit un bénéfice de $4\,645\,987\,753^F$ après 25 ans. Faites vous l'investissement ?

4. **Exercices de calcul matriciel.**

   (a) Que se passe-t-il si on multiplie à droite (respectivement à gauche) une matrice par une matrice diagonale ?

   (b) Vérifier les affirmations suivantes:

      i. l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est triangulaire supérieure (resp. inférieure);

      ii. le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure (resp. inférieure) (comment obtient-on les élément de la diagonale du produit ?).

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_{m,r}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ partitionnées de la façon suivante :

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad r_1 & \quad r_2 \end{array} & \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad n_1 & \quad n_2 \end{array} & \end{array}$$

Montrer que $AB = C = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad n_1 & \quad n_2 \end{array} & \end{array}$ où $C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j}$ (*Indication* : on remarquera que $[C_{ij}]_{pq} = \sum_{k=1}^{r} a_{(i-1)m_1+p,k} b_{k,(j-1)n_1+q}$)

(d) Si A et B sont des matrices carrées, vérifiez que

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det A \times \det B.$$

(e) Soit $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ une matrice carrée décomposée par blocs. En supposant la sous-matrice A_{11} inversible, prouver que

$$\det A = \det A_{11} \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}).$$

La matrice $A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ est appelée complément de Schur de A.

5. Montrer que deux matrices réelles A et B semblables sur $\mathbb{C}$ sont semblables sur $\mathbb{R}$ (*Indication : partant de* $A = P^{-1}BP$, *montrer que la partie réelle et que la partie imaginaire de* P *se comportent de façon intéressante vis à vis de* A *et* B).

6. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne , i.e $A^H \equiv \overline{A}^T = A$. Vérifier que $u^H A u \in \mathbb{R}$ pour tout $u \in \mathbb{C}^n$.
   (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $x^T A x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $x^T(A + A^T)x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
   (c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $x^H A x \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ si et seulement si A est symétrique.

7. Soit A une matrice symétrique réelle $n \times n$ de valeurs propres λ_i dont les vecteurs propres associés forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Vérifier que

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i p_i^T.$$

8. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée de dimension n sur $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \ , \ |a_{i,i}| > \sum_{i \neq j} |a_{i,j}|$$

   (a) Prouver que A est inversible (on pourra raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $(x_1, \ldots, x_n)$ tel que : $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$).
   (b) Que pouvez-vous dire des mineurs fondamentaux de A ? (i.e des matrices $[a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq k}$ pour $k = 1, \ldots, n$).

9. Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| < 1.$$

Montrer que pour toute matrice colonne réelle B d'ordre n, l'équation $X = AX + B$ admet une solution unique.

10. On pose $A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon\cos(\frac{2}{\varepsilon}) & -\varepsilon\sin(\frac{2}{\varepsilon}) \\ -\varepsilon\sin(\frac{2}{\varepsilon}) & 1-\varepsilon\cos(\frac{2}{\varepsilon}) \end{pmatrix}$ où $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$. Quelles sont les valeurs propres de A ? les vecteurs propres de A ? Conclure que les vecteurs propres de A ne tendent pas vers une limite quand $\varepsilon \to 0$ bien que $\lim_{\varepsilon\to 0} A(\varepsilon)$ existe.

11. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice tridiagonale

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. Soit A une matrice symétrique définie positive. On désigne par A_k la matrice $[a_{i,j}]_{1\le i,j\le k}$ où $k = 1, \dots, n$.
   (a) Prouver que $a_{i,i} > 0$ pour tout i.
   (b) Montrer que $\det A > 0$, puis plus généralement que $\det A_k > 0$ pour tout $k = 1, \dots, n$.
   (c) Réciproquement, soit M une matrice symétrique $n \times n$, telle que $\det M_k > 0$ pour tout $k = 1, \dots, n$. Montrer que M est définie positive. (*Indication : raisonner par récurrence sur n*).

13. Soit A une matrice symétrique définie positive. Démontrer que

$$v^T A^{-1} v = \frac{\det(A + vv^T)}{\det A} - 1 \qquad \text{pour tout vecteur } v$$

(*Indication : introduire la matrice "racine carrée de A"*).

14. **Lemme d'inversion matricielle.** Montrer que[1]

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)^{-1} DA^{-1}$$

Application: inverse d'une matrice perturbée par une matrice de rang *'petit' telle que* $\left(A + ab^T\right)^{-1}$ où a et b sont des vecteurs.

15. Vérifier que[1]

$$\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E^{-1} + E^{-1}FD^{-1}GE^{-1} & -E^{-1}FD^{-1} \\ -D^{-1}GE^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

où $D = H - GE^{-1}F$. Application: on connaît déjà E^{-1}, et H est scalaire.

16. Donner un exemple de matrice A, 2×2, pour laquelle on a toujours

$$\rho(A) < \|A\|$$

17. Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) et P une matrice inversible réelle (ou complexe). Vérifier que $\|x\|' = \|P(x)\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$. Prouver que $\|A\|' = \|PAP^{-1}\|$.

18. Calculer $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ et $\|A\|_\infty$ pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, puis pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

19. Calculer $K_1(A)$, $K_2(A)$, $K_\infty(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ régulière (i.e inversible). Montrer que $K_2(A) = 1$ si et seulement si A est un multiple non nul d'une matrice orthogonale.

[1] On suppose que les matrices ont les dimensions adéquates et sont inversibles lorsque c'est nécessaire.

21. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\|.\|$ une norme matricielle. Montrer que

$$\lim_{k \to +\infty} \|B^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(B)$$

22. Soit A une matrice carrée telle que la suite $(A^k)_{k\geq 0}$ converge vers une matrice inversible. Trouver A.

23. Soit A une matrice carrée à coefficients complexes, déterminer le rang de sa comatrice (*Indication : on raisonnera sur le rang de* A).

24. Soit S une matrice réelle anti-symétrique (*i.e.* $S^T = -S$) inversible.

    (a) Montrer que les valeurs propres de S sont imaginaires pures.

    (b) Montrer que S^2 est symétrique et n'a pas de valeurs propres simples.

    (c) Déduire du (a) que $I + S$ est inversible.

    (d) Montrer que $M = (I - S)(I + S)^{-1}$ est orthogonale (*i.e.* $MM^T = M^T M = I$).

25. **Inverse généralisée (inverse de Moore-Penrose)**

    (a) Montrer qu'il existe une matrice $A^\dagger$ telle que $x = A^\dagger b$ soit solution de $Ax = b$ pour tout $b \in \mathrm{Im}(A)$,où A est une matrice réelle qui n'est pas nécessairement carrée. (Indication: multiplier par A^T et utiliser le fait que toute matrice symétrique peut s'écrire sous la forme $P^{-1}\Delta P$ où P est une matrice orthogonale et où Δ est diagonale.)

    (b) Bien qu'il n'y ait pas unicité de la solution, la méthode décrite çi-dessus conduit naturellement à une solution *"canonique"*. Montrer que cette solution $A^\dagger$ vérifie les propriétés suivantes:

        i. $AA^\dagger$ et $A^\dagger A$ sont symétriques.

        ii. $AA^\dagger A = A$ et $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$

        iii. Si A est inversible, $A^\dagger = A^{-1}$

    (c) On ne suppose plus $b \in \mathrm{Im}(A)$. Montrer que $A^\dagger b$ est solution du probléme aux moindres carrés suivant:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$$

26. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible et $E = \alpha A$ pour $|\alpha| < 1$. Montrer que les solutions de $Ax = b$ et de $(A + E)y = b$ vérifient

$$\|x - y\| \leq \frac{|\alpha|\|x\|}{1 - |\alpha|}.$$

27. On considère la matrice $A = I + \alpha uu^T$ où $u \in \mathbb{R}^n$ et $u^T u = 1$.

    (a) Quelles sont les valeurs propres de A ?

    (b) En déduire que pour tout nombre $N \geq 1$, on peut choisir α tel que $K_2(A) = N$.

28. On considère les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1,00001 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1,00001 \end{bmatrix}$. Montrez que le rapport de la valeur propre la plus grande en valeur absolue par la valeur propre la plus petite en valeur absolue est à peu près 1 pour A et 4×10^5 pour B. Vérifiez que cependant $K_2(A) = K_2(B)$. Quelle conclusion en tirez-vous ?

29. Soit la matrice d'ordre 100

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $K_2(A) \geq 2^{100}$. Calculer $K_1(A)$ et $K_\infty(A)$.

30. Soit la matrice 100×100

$$A = \begin{pmatrix} 0,501 & -1 & & & \\ & 0,502 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 0,600 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que la première composante x_1 de la solution de $Ax = e_{100}$ est strictement plus grande que 10^{22}.

(b) Examiner alors $K_\infty(A)$, puis $\frac{|\lambda|_{max}}{|\lambda|_{min}}$.

31. Soit x et y deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|.\|$. Montrer que si

$$\frac{\|y - x\|}{\|x\|} \leq \rho < 1$$

alors

$$\frac{\|x - y\|}{\|y\|} \leq \frac{\rho}{1 - \rho}$$

32. Soit A une matrice $n \times n$ inversible fixée que l'on perturbe par une matrice δA telle que $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$.

(a) Prouver que

$$\frac{\|(A + \delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|(A + \delta A)^{-1}\|} \leq K(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

(b) Démontrer l'inégalité

$$\frac{\|(A + \delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq K(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}(1 + O(\|\delta A\|)).$$

33. Voici un exemple de système linéaire mal conditionné

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 26 \\ 15 \end{pmatrix},$$

de solution $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour s'en convaincre, considérer le système linéaire perturbé

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 + \delta u_1 \\ u_2 + \delta u_2 \\ u_3 + \delta u_3 \\ u_4 + \delta u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 25 \\ 16 \end{pmatrix},$$

de solution $\begin{pmatrix} 832 \\ 1324 \\ -2407 \\ 2021 \end{pmatrix}$. Faire l'analyse numérique de cet exemple.

34. Donner la factorisation LU de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

35. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle factorisable LU ?

36. **Factorisation de Cholesky.** Soit A une matrice symétrique définie positive, on sait qu'elle admet une factorisation LU.

    (a) En intercalant une bonne matrice diagonale à coefficients strictement positifs dans cette factorisation, montrer qu'il existe une matrice triangulaire inférieure B ayant ses éléments diagonaux tous strictement positifs telle que $A = BB^T$.

    (b) Montrer que cette factorisation est unique sous la condition "éléments diagonaux tous strictement positifs".

    (c) Quel est l'intérêt de cette factorisation pour la résolution du système $Ax = b$?

    (d) Effectuer la factorisation de Cholesky de la matrice

    $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix}.$$

    (e) Ecrire un algorithme pour le calcul de B. Compter le nombre d'opérations. Remarques ?

37. Soit $A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$ une matrice tridiagonale pour laquelle on suppose que les nombres $\delta_k = \det A_k$, $k = 1, \ldots, n$ sont tous différents de zéro.

    (a) On pose $\delta_0 = 1$. Vérifier que les δ_k satisfont la relation :

    $$\delta_k = b_k \delta_{k-1} - a_k c_{k-1} \delta_{k-2} \qquad 2 \leq k \leq n. \tag{1}$$

    (b) En déduire que la factorisation LU de A est

    $$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_2 \frac{\delta_0}{\delta_1} & 1 & & & \\ & a_3 \frac{\delta_1}{\delta_2} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_n \frac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_0} & c_1 & & & \\ & \frac{\delta_2}{\delta_1} & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & c_{n-1} \\ & & & & \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \end{pmatrix} \tag{2}$$

    Remarque : on peut en tirer une méthode très économique de résolution du système linéaire $Ax = b$...