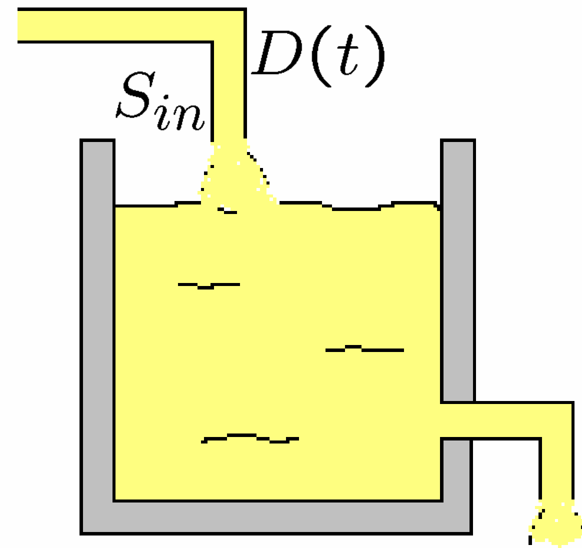
Laboratoire d'Analyse Appliquée et Optimisation

Problèmes d'identification dans les systèmes dynamiques non linéaires, théorie générale et application aux réacteurs biologiques

Eric Busvelle et
Jean-Paul Gauthier

Exemple: réacteur biologique

$$
\begin{cases}
\dfrac{ds(t)}{dt} = -\mu(s(t))\,x(t) + D(t)(S_{in} - s(t)) \\
\dfrac{dx(t)}{dt} = (\mu(s(t)) - D(t))\,x(t)
\end{cases}
$$



$s(t)$	:	substrat
$x(t)$	:	bactéries
$D(t)$	:	débit
S_{in}	:	substrat en entrée

$\mu(s) > 0$, $\mu(0) = 0$ fonction de croissance,

typiquement:

la loi de Monod $\mu(s) = \frac{\mu_0 s}{k_m + s}$ ou

la loi de Haldane $\mu(s) = \frac{\mu_0 s}{k_m + s + \frac{s^2}{k_i}}$ ou autre.

retour

Observabilité

On mesure $s(t)$, peut-on déterminer $x(t)$?

$$\frac{ds(t)}{dt} = -\mu(s(t))\,x(t) + D(S_{in} - s(t))$$

Le système est observable.

On mesure $x(t)$, peut-on déterminer $s(t)$?

$$\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= (\mu(s(t)) - D(t))x(t) \\
\frac{d\mu(s(t))}{dt} &= \mu'(s(t))\,(-\mu(s(t))\,x(t) + D(t)\,(S_{in} - s(t)))
\end{aligned}$$

Le système est encore observable

(en général).

Observateur

On note $X(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$ et

$C = \begin{pmatrix} 1, 0 \end{pmatrix}$ si $s(t)$ est la sortie

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{X}}{dt} &= f\left(\widehat{X}\right) + PC^T\left(y - x_1\right) \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{df}{dx}\left(\widehat{X}\right)P + P\frac{df}{dx}\left(\widehat{X}\right)^T + Q_\theta - PC^TCP \end{aligned}$$

et sous certaines conditions, $X(t) - \widehat{X}(t) \longrightarrow 0$ quand $t \to +\infty$

(Observateur de Kalman étendu grand-gain)

Identifiabilté

On ne connaît plus $\mu(s)$, mêmes questions:

Si on observe $x(t)$ uniquement,
  peut-on déterminer $\mu(s)$ et $s(t)$? non

Si on observe $s(t)$ uniquement,
  peut-on déterminer $\mu(s)$ et $x(t)$? oui, si...

Si on observe $x(t)$ et $s(t)$,
  peut-on déterminer $\mu(s)$? oui

$$\left(\text{rappel :} \begin{cases} \dfrac{ds(t)}{dt} &= -\mu(s(t))\,x(t) + D(S_{in} - s(t)) \\ \dfrac{dx(t)}{dt} &= (\mu(s(t)) - D)x(t) \end{cases} \right)$$

On observe $x(t)$ uniquement

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = (\mu(s) - D)x \\ \dfrac{ds(t)}{dt} = -\mu(s)\, x + D(S_{in} - s) \\ y = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s(t) &= e^{-Dt}s(0) + \int_0^t e^{-D(t-\tau)}(-(\mu x)(\tau) + DS_{in})d\tau \\ s(0) &= s_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= e^{-Dt}\tilde{s}_0 + \int_0^t e^{-D(t-\tau)}(-(\mu x)(\tau) + DS_{in})d\tau \\ \tilde{s}(0) &= \tilde{s}_0 \approx s_0 \end{aligned}$$

$\tilde{\mu}(\tilde{s}) = \mu(s)$ donne $\dfrac{dx(t)}{dt} = (\tilde{\mu}(\tilde{s}(t)) - D)x(t)$

On observe $x(t)$ et $s(t)$

On pose $z(t) = \mu(s(t))\, x(t)$,

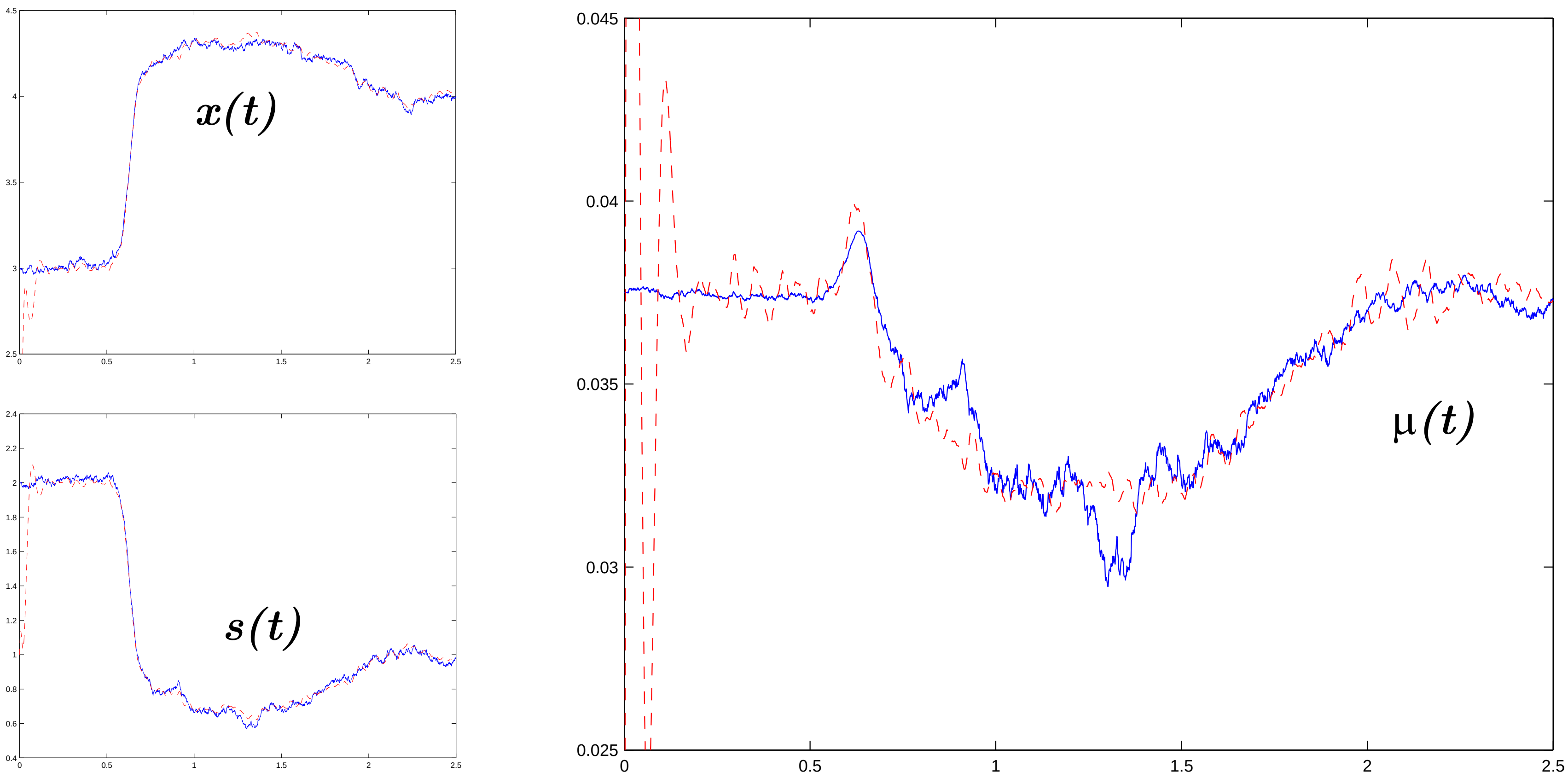
et on suppose $\dfrac{d^k z}{dt^k} = 0$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{s} & = & -z + D(t)(S_{in} - s) \\ \dot{x} & = & z - D(t)\ x \\ \dot{z} & = & z_1 \cdots \\ \dot{z}_{k-2} & = & z_{k-1} \\ \dot{z}_{k-1} & = & 0 \\ y & = & (s, x) \end{array}\right.$$

en notant $\frac{ds}{dt} = \dot{s}$

observateur de Kalman linaire (optimal)

Observateur de Kalman linéaire ($y=(x,s)$)



En bleu les valeurs réelles, en rouge les estimations.

On observe s(t) uniquement

Posons $\left\{\begin{array}{rcl} X & = & x+s \\ \widetilde{D}(t) & = & \int_0^t D(\tau)\,d\tau \\ \Lambda(t) & = & e^{\tilde{D}(t)}(s-S_{in})+S_{in} \end{array}\right.$ alors

$$\begin{array}{rcl} \dot{\Lambda} & = & -e^{\tilde{D}(t)}(X-s)\mu(s) \\ & = & (\Lambda - X_0)\mu(s) \\ \text{avec } \Lambda(0) & = & s(0) \end{array}$$

Si $s(t_0) = s(t_1),\ t_0 < t_1$ alors

$$\frac{\dot{\Lambda}(t_0)}{\Lambda(t_0)-X_0} = \mu(s(t_0)) = \mu(s(t_1)) = \frac{\dot{\Lambda}(t_1)}{\Lambda(t_1)-X_0}$$

donne X_0 donc $\mu(s(t)) = \frac{\dot{\Lambda}(t)}{\Lambda(t)-X_0}$

Résultat

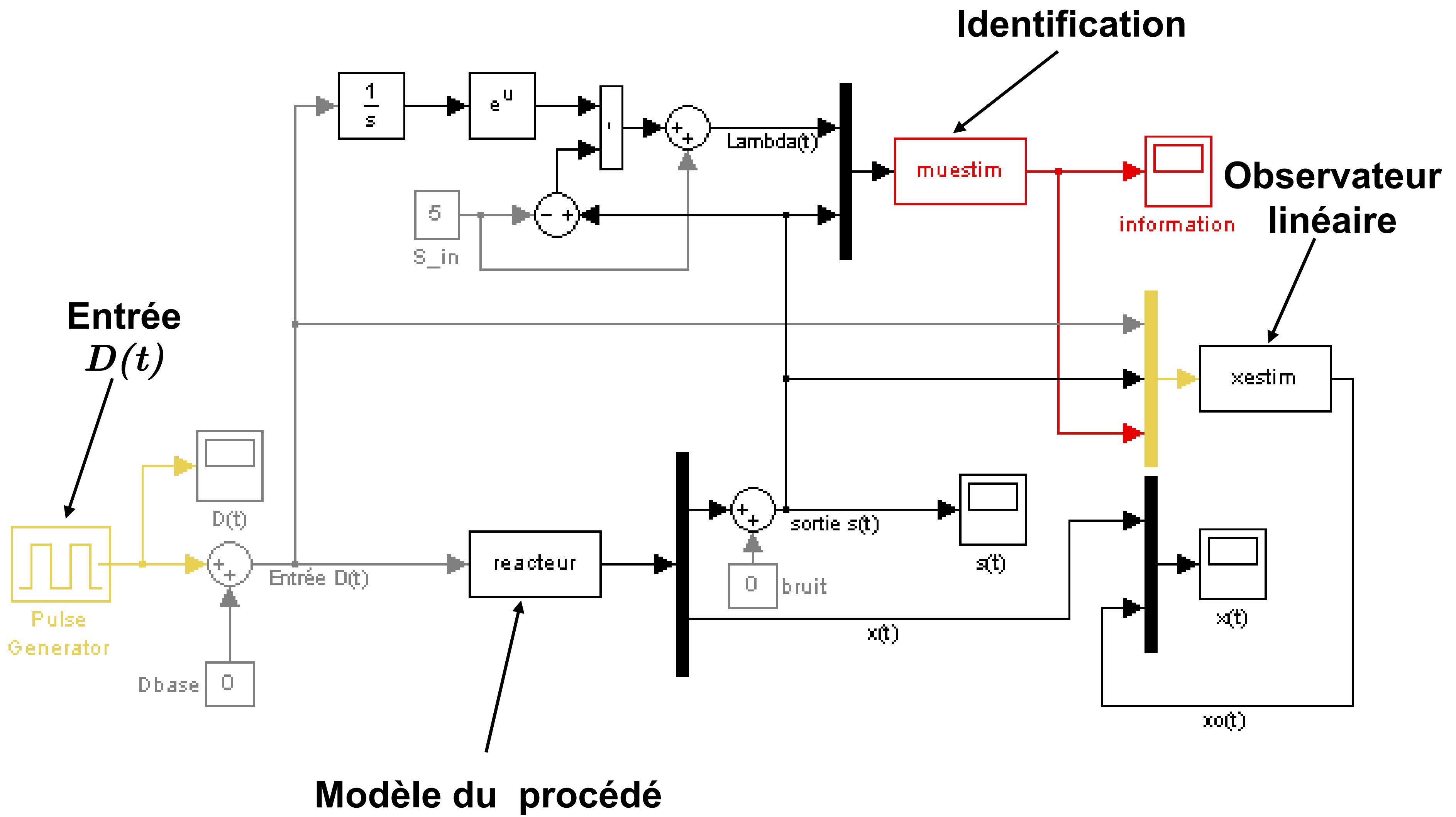
$\mu(s)$ est identifiable $\Longleftrightarrow$ $s(t)$ visite deux fois une valeur identique

1. On échantillonne μ aux points $k\Delta s$ et on identifie $\widehat{\mu}_t(h\Delta s)$ au temps t;

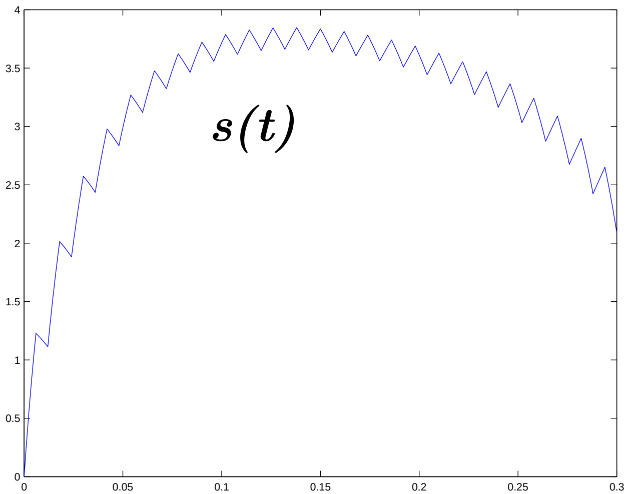
2. On estime $x(t)$ sur la base de $\widehat{\mu}_t(h\Delta s)$ par un observateur linéaire.

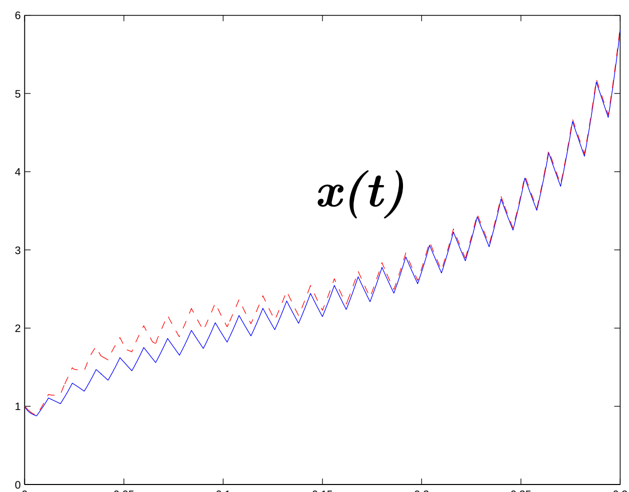
Simulation:
$\mu(s)$ de type Haldane, $\widehat{\mu}_0(s)$ de type Monod,

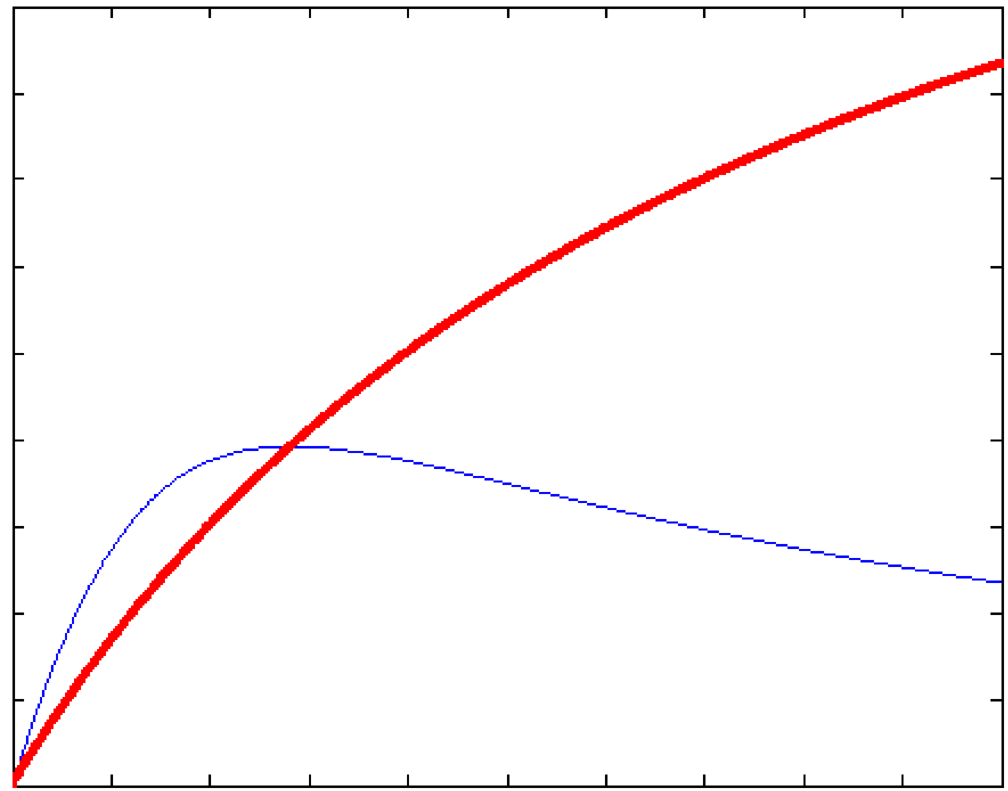
Modèle de simulation sous Matlab/Simulink



Identification de µ(t)

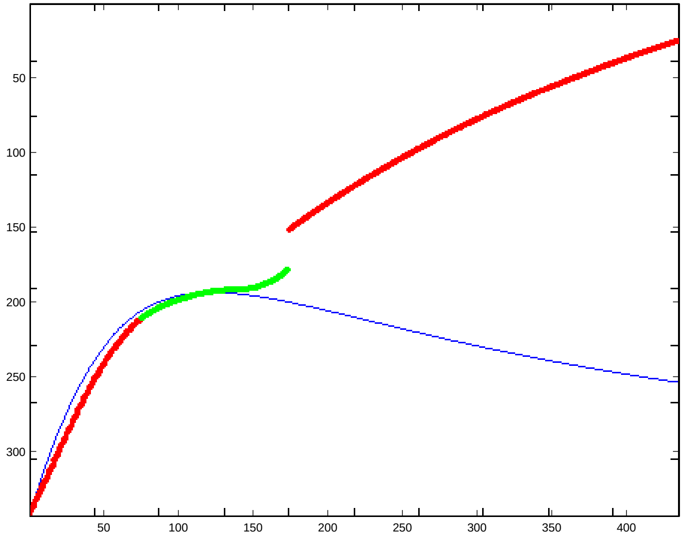


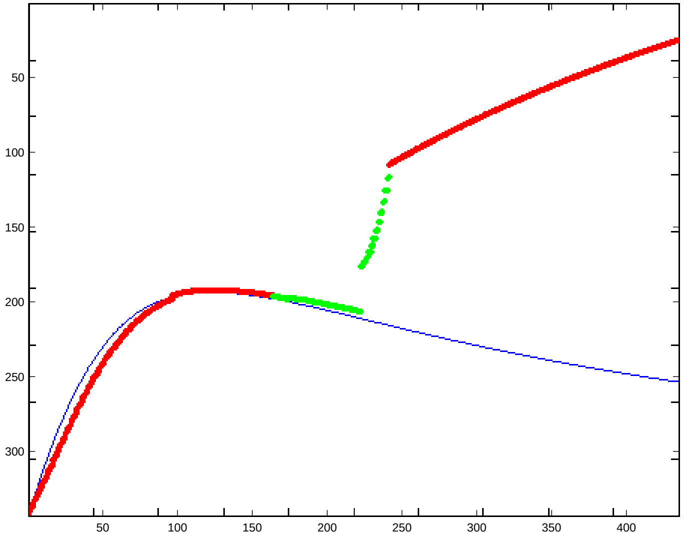


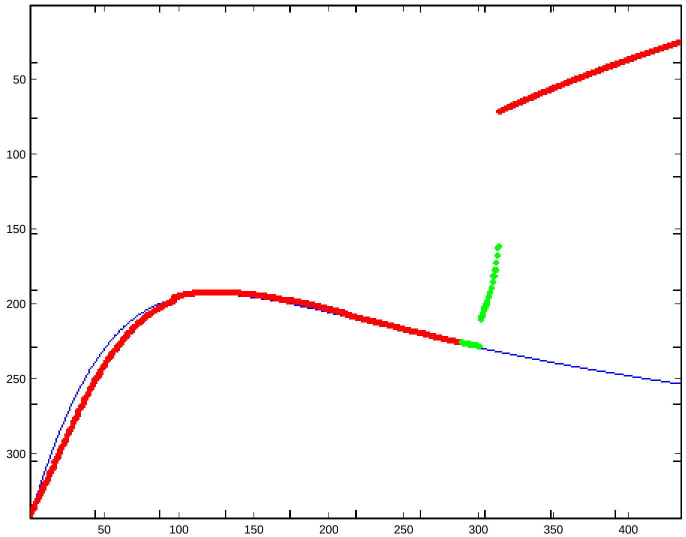


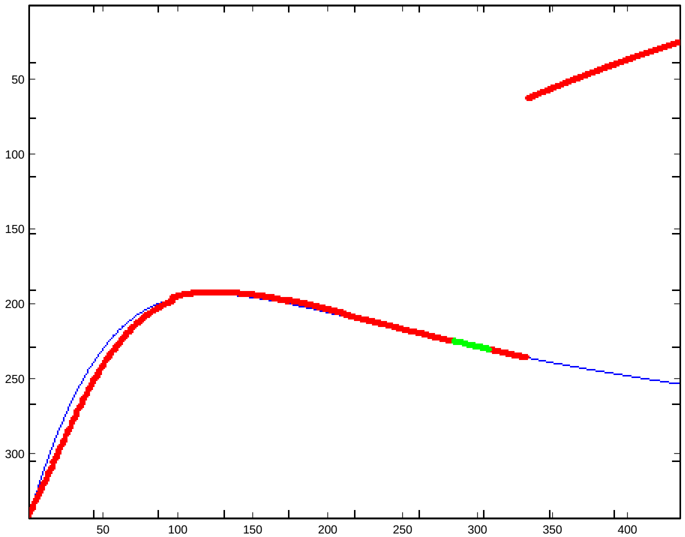
En rouge, loi de Monod (a priori)
En bleu, loi de Haldane (loi réelle)
En vert, partie de $\mu(s)$ en cours d'identification

Identification de μ









Théorie générale

$$\Sigma : \begin{cases} \frac{dx}{dt} & = & f(x, u(t), \varphi \circ \pi(x(t))) \\ y & = & h(x, u(t), \varphi \circ \pi(x(t))) \end{cases}$$

où $\varphi : \begin{array}{ccccc} X & \rightarrow & Z & \rightarrow & I \subset \mathbf{R} \\ x & \rightarrow & z = \pi(x) & \rightarrow & \varphi(\pi(x)) \end{array}$

et $P_\Sigma : \begin{array}{ccccccc} X & \times & L^\infty[U] & \times & L^\infty[I] & \rightarrow & L^\infty[\mathbf{R}^{d_y}] \\ (x_0 & , & u(.) & , & \hat{\varphi}(.)) & \rightarrow & y(.) \end{array}$

φ est la fonction inconnue de $\pi(x)$

$\hat{\varphi}$ représente une fonction de t

P_Σ est la fonction entrée/sortie de Σ

Identifiabilité

Définition 1: Σ est identifiable en

$$(u(.), y(.)) \in L^\infty[U] \times L^\infty[\mathbf{R}^{d_y}]$$

ssi il existe au plus un

$$(x_0, \widehat{\varphi}) \in X \times L^\infty(I)$$

tel que

$$P_\Sigma(x_0, u, \widehat{\varphi})(t) = y(t)$$

et il existe $\varphi : Z \to I$ tel que $\widehat{\varphi}(t) = \varphi \circ \pi(x(t))$.

Σ est identifiable ssi il est identifiable en tout $(u(.), y(.))$ admissible.

Identifiabilité infinitésimale

Définition 2:

$$T\Sigma : \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} & = & T_{x,\varphi} f(x,u,\varphi;\xi,\eta) \\ \widehat{y} & = & d_{x,\varphi} h(x,u,\varphi;\xi,\eta) \end{cases}$$

où $(\xi,\eta) \in T_x X \times T_\varphi I$, on défini

$$\begin{aligned} P^t_{T\Sigma}(\xi_0,\eta) &= d_{x,\varphi} h(x,u,\widehat{\varphi}; T_{x,\varphi}\phi_t(x,u,\widehat{\varphi};\xi_0,\eta),\eta) \\ &= T_{x,\varphi} P^t_\Sigma(\xi_0,\eta) \end{aligned}$$

Σ est infinitésimalement identifiable en $(x_0, u, \widehat{\varphi}) \in X \times L^\infty[U] \times L^\infty[I]$ si $P^t_{T\Sigma}$ est injective $\forall t > 0$

Σ est uniformément infinitésimalement identifiable si ceci est vrai en tout point $(x_0, u, \widehat{\varphi})$

Identifiabilité différentielle

Soit $D_k\Phi = X \times (U \times \mathbf{R}^{(k-1)d_u}) \times (I \times \mathbf{R}^{k-1})$ l'espace des jets d'ordre k du système Σ $(j^k(u) = \left(u(0), u'(0), \ldots, u^{(k-1)}(0)\right))$,on pose

$$\begin{array}{rccc} \Phi_k^\Sigma : & D_k\Phi & \rightarrow & \mathbf{R}^{kd_y} \\ & (x_0, j^k(u), j^k(\widehat{\varphi})) & \rightarrow & j^k(y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{k,2}^{\Sigma,*} : & D_k\Phi \times D_k\Phi & \rightarrow & \mathbf{R}^{kd_y} \times \mathbf{R}^{kd_y} \\ & (z_1, z_2) & \rightarrow & (\Phi_k^\Sigma(z_1), \Phi_k^\Sigma(z_2)) \end{array}$$

Définition 3: Σ est différentiellement identifiable d'ordre k ssi
$\Phi_{k,2}^{\Sigma,*}(z_1, z_2) \in \Delta_k \Rightarrow (x_1, \widehat{\varphi}_1(0)) = (x_2, \widehat{\varphi}_2(0))$

Généricité (sans contrôle)

Proposition. Identifiabilité differentielle $\Rightarrow$ Identifiabilité

Théorème 1.

• Si $d_y \geq 3$, l'identifiabilité differentielle d'ordre $2n+1$ **est générique** dans la classe des systèmes C^∞.

• Si $d_y < 3$, l'identifiabilité differentielle **n'est pas** générique.

Passer la preuve

Preuve de la généricité 1/2

$$Z_i = \left(x_i, \varphi_i, \varphi_i', \ldots, \varphi_i^k, j_\Sigma^k(x_i, \varphi_i)\right),\ i = 1, 2$$
$$Z = (Z_1, Z_2)$$
$$\Phi(Z) = \Phi_k^\Sigma(Z_1) - \Phi_k^\Sigma(Z_2) \in R^{k\,d_y},$$
$$k = 2n + 1,\ d_y \geq 3$$

Admettons Φ submersion

$$\text{codim}\Phi^{-1}(0) = k\,d_y$$

Soit $\Pi\Phi^{-1}(0) = \left(x_i, \varphi_i, j_\Sigma^k(x_i, \varphi_i)\right)_{i=1,2}$

$$\begin{aligned} \text{codim}\Pi\Phi^{-1}(0) &\geq k\,d_y - 2\,(k-1) = k\,(d_y - 2) + 2 \\ &\geq k + 2 \geq 2n + 3 \end{aligned}$$

Preuve de la généricité 2/2

$$\begin{array}{rccc} \rho_\Sigma : & (X \times I)^2 \setminus \Delta & \to & \left(J^k_\Sigma\right)^2 \\ & (x_1, \varphi_1, x_2, \varphi_2) & \to & \left(x_i, \varphi_i, j^k_\Sigma(x_i, \varphi_i)\right)_{i=1,2} \end{array}$$

Théorème de transversalité multijet: l'ensemble des Σ tels que ρ_Σ est transverse à $\Pi\Phi^{-1}(0)$ est résiduel.

$$\dim (X \times I)^2 \setminus \Delta = 2n + 2$$
$$\Downarrow$$
$$\text{génériquement, } \rho_\Sigma \text{ ne rencontre pas } \Pi\Phi^{-1}(0)$$

Cas 1 sortie

Théorème 2. Si Σ est uniformément infinitésimalement identifiable alors

i) $\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{h, L_{f_\varphi}h, \ldots, (L_{f_\varphi})^{n-1}h\right\} \equiv 0$

ii) $\frac{\partial}{\partial\varphi}L^n_{f_\varphi}h \neq 0$

iii) $d_x h \wedge \ldots \wedge d_x L^{n-1}_{f_\varphi}h \neq 0$,

ce qui entraine localement que le système peut s'écrire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ & \vdots & \\ \dot{x}_{n-1} & = & x_n \\ \dot{x}_n & = & \psi(x,\varphi) \\ y & = & x_1 \end{cases} \quad \text{et } \frac{\partial}{\partial\varphi}\psi(x,\varphi) \neq 0$$

retour

Cas 1 sortie, réciproque

Théorème 3. Si Σ satisfait les conditions précédentes,

i) $\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{h, L_{f_\varphi}h, \ldots, (L_{f_\varphi})^{n-1}h\right\} \equiv 0$

ii) $\frac{\partial}{\partial\varphi}L_{f_\varphi}^{n}h \neq 0$

iii) $d_x h \wedge \ldots \wedge d_x L_{f_\varphi}^{n-1}h \neq 0$,

alors Σ est localement identifiable,

loc. unif. infinitésimalement identifiable,

et loc. diff. identifiable d'ordre $n+1$.

Passer la preuve

Preuve du cas 1 sortie 1/2

Soit $k < n$ le plus petit k tel que $d_\varphi L_f^k h \not\equiv 0$:

$$\Sigma \quad \begin{cases} y & = & x_1 \\ \dot{x}_1 & = & x_2 \cdots \\ \dot{x}_{k-1} & = & x_k \\ \dot{x}_k & = & L_f^k(x,\varphi) = f_k(x,\varphi) \cdots \\ \dot{x}_n & = & f_n(x,\varphi) \end{cases}$$

$$T\Sigma \quad \begin{cases} \dot{x} & = & f(x,\varphi) \\ \widehat{y} & = & \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 & = & \xi_2 \cdots \\ \dot{\xi}_{k-1} & = & \xi_k \\ \dot{\xi}_k & = & d_x f_k(x,\varphi)\,\xi + d_\varphi f_k(x,\varphi)\,\eta \end{cases}$$

Preuve du cas 1 sortie 2/2

Feedback $\eta = -\dfrac{d_x f_k(x,\varphi_0)\,\xi}{d_\varphi f_k(x,\varphi_0)}$ en φ_0 tel que $d_\varphi f_k(x,\varphi_0) \neq 0$ donne $\frac{d\xi_k}{dt} = 0$ qui rend le système inobservable.

Supposons maintenant $\frac{\partial}{\partial\varphi} L^n_{f_\varphi} h = 0$ en (x,φ)

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \supset & E = \left\{(x,\varphi)\,;\, d_\varphi L^n_f h = 0\right\} \\ & & \downarrow \Pi \\ X & \supset & \Pi E \end{array}$$

Théorème de Hardt $\Rightarrow \exists \widehat{\varphi}$

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} y & = & x_1, & \dot{x}_1 & = & x_2, & \ldots & \dot{x}_n & = \psi(x,\widehat{\varphi}(x)) \\ \widehat{y} & = & \xi_1, & \dot{\xi}_1 & = & \xi_2, & \ldots & \dot{\xi}_n & = d_x\psi(x,\widehat{\varphi}(x)) + 0 \end{array}\right.$$

Cas 2 sorties: définitions de *k* et *r*

Posons $E_l = \left\{ d_x h_i, d_x L_{f_\varphi} h_i, \ldots, d_x L_{f_\varphi}^{l-1} h_i \,,\, i = 1, 2 \right\}$ et $N(l) = \text{rang}\,(E_l)$ en un point générique:

On défini k par

$N(0)$	$N(1)$	$\cdots$	$N(k-1)$	$N(k)$	$N(k+1)$	$\cdots$	$N(k+m)$
0	2		$2k-2$	$2k$	$2k+1$		$2k+m$

$(2k + m \leq n)$

Définition 4. On appelle ordre du système le plus petit entier r tel que $d_\varphi L_{f_\varphi}^r (h_1, h_2) \neq 0$.

Classification

Lemme: Si Σ est uniformément infinitésimalement identifiable alors

$$\begin{array}{ll} (1) & 2k+m=n \\ (2) & r \leq k+m \end{array}$$

Preuve:

(1) $\varphi = \varphi_0 =$cte $\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & f(x, \varphi_0) \\ \dot{\xi} & = & g(x, \xi, \varphi_0) \\ y & = & h(x, \varphi_0) \end{array} \right.$ contredit l'observabilité

(2) $\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & f(x) \\ y & = & h(x) \end{array} \right.$ contredit l'identifiabilité

Définition 5. Un système qui vérifie (1) et (2) est dit régulier.

Type 3: $r=k$ et $n=2k$

$$\left\{\begin{array}{lllllll} y_1 & = & x_1 & \quad & y_2 & = & x_2 \\ \dot{x}_1 & = & x_3 & & \dot{x}_2 & = & x_4 \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ \dot{x}_{n-3} & = & x_{n-1} & & \dot{x}_{n-2} & = & x_n \\ \dot{x}_{n-1} & = & f_{n-1}(x,\varphi) & & \dot{x}_n & = & f_n(x,\varphi) \end{array}\right.$$

avec $\frac{\partial}{\partial\varphi}(f_{n-1}, f_n) \neq 0$

Pas de chute de rang avant la dernière dérivée et l'apparition de φ.

Type 1: *r>k*

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} y_1 & = & x_1 & & y_2 & = & x_2 \\ \dot{x}_1 & = & x_3 & & \dot{x}_2 & = & x_4 \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ \dot{x}_{2k-3} & = & x_{2k-1} & & \dot{x}_{2k-2} & = & x_{2k} \\ \dot{x}_{2k-1} & = & \multicolumn{5}{l}{f_{2k-1}(x_1, \ldots, x_{2k+1})} \\ \dot{x}_{2k} & = & x_{2k+1} & & & & \\ & \vdots & & & & & \\ \dot{x}_{n-1} & = & x_n & & & & \\ \dot{x}_n & = & f_n(x, \varphi) & & & & \end{array}\right.$$

avec $\frac{\partial f_n}{\partial \varphi} \neq 0$.

Chute de rang avant l'apparition de φ

$\simeq$ cas monosortie

retour

Type 2: *r<k*

$$
\begin{array}{lllllll}
y_1 & = & x_1 & \quad & y_2 & = & x_2 \\
\dot{x}_1 & = & x_3 & & \dot{x}_2 & = & x_4 \\
 & \vdots & & & & \vdots & \\
\dot{x}_{2r-3} & = & x_{2r-1} & & \dot{x}_{2r-2} & = & x_{2r} \\
\dot{x}_{2r-1} & = & \psi(x,\varphi) & & \dot{x}_{2r} & = & F_{2r}(x_1,\ldots,x_{2r+1},\psi(x,\varphi)) \\
 & & & & \dot{x}_{2r+1} & = & F_{2r+1}(x_1,\ldots,x_{2r+2},\psi(x,\varphi)) \\
 & & & & & \vdots & \\
 & & & & \dot{x}_{n-1} & = & F_{n-1}(x,\psi(x,\varphi)) \\
 & & & & \dot{x}_n & = & F_n(x,\varphi)
\end{array}
$$

avec $\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \neq 0, \frac{\partial F_{2r}}{\partial x_{2r+1}} \neq 0, \ldots., \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} \neq 0$

Apparition de φ avant la chute de rang

retour

$r=k$ et $2k<n$

Si la chute de rang coïncide avec l'ordre et ceci avant la dernière dérivation:

$$d_x h_1 \wedge \cdots \wedge d_x L_{f_\varphi}^{k-1} h_1 \wedge d_x L_{f_\varphi}^{k-1} h_2 \wedge d_x L_{f_\varphi}^{k} h_2 \not\equiv 0$$

Si $d_\varphi L_{f_\varphi}^{k} h_1 \neq 0$, on obtient φ par y_1 et $x_{2k}, \ldots, x_n$ par y_2 $\longrightarrow$ Type 2

Si $d_\varphi L_{f_\varphi}^{k} h_1 \equiv 0$, on trouve φ par y_2

$\longrightarrow$ Type 1

Questions diverses

- Concernant l'application ?
- A propos de la simulation ?
- Les définitions ?
- Sur la généricité ?
- Sur la classification à 1 sortie ?
- Ou bien la classification à 2 sorties ?
- Ou autre…