Cours d'Interfaces Graphiques n°4

Edouard THIEL

Faculté des Sciences

Université d'Aix-Marseille (AMU)

Janvier 2016

Les transparents de ce cours sont téléchargeables ici :
http://pageperso.lif.univ-mrs.fr/~edouard.thiel/ens/igra/

Lien court : http://j.mp/optigra

Plan du cours n°4

1. Courbes paramétriques
2. Courbes de Bézier
3. Algorithme de De Casteljau
4. B-splines cubiques uniformes

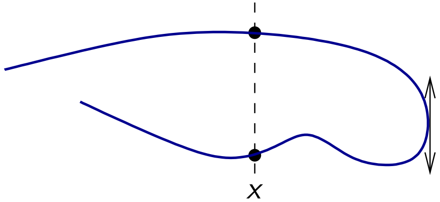
1 - Courbes paramétriques

But : mettre une courbe en équation pour

- dessiner la courbe
- transformations (zoom, rotations, ...)
- imprimer
- usiner

Forme de l'équation ?

- Équation $y = f(x)$: ne permet pas - plusieurs y pour un x
  - tangente verticale



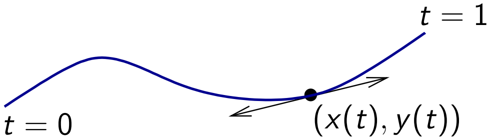
- Solution : courbe paramétrique

Courbe paramétrique

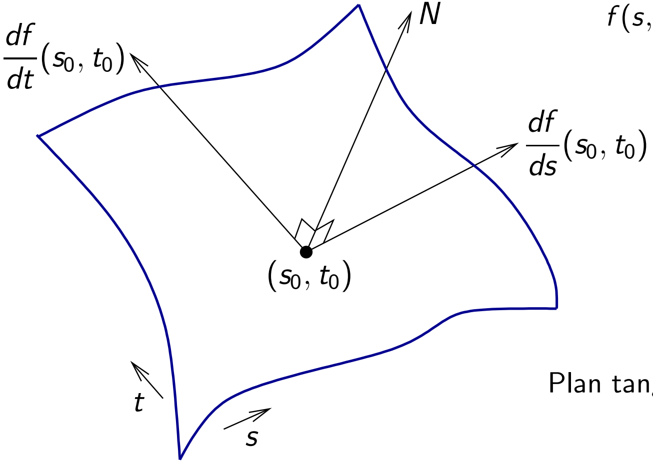
$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ avec domaine $\mathcal{I}$ pour t par exemple $\mathcal{I} = [0, 1]$

Courbe $=$ trajectoire de $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ lorsque t parcourt $\mathcal{I}$

Tangente $= \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$



Surface paramétrique



$$f(s,t) = \begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ z(s,t) \end{pmatrix}$$

Plan tangent : $\dfrac{df}{dt}, \dfrac{df}{ds}$

Normale : $N = \dfrac{df}{dt} \wedge \dfrac{df}{ds}$

(produit vectoriel)

2 - Courbes de Bézier

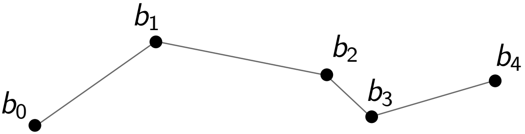
Pierre Bézier, ingénieur chez Renault, 1962

$\rightarrow$ Conception de pièces automobiles sur ordinateur

Nombreuses applications : - CAO
- synthèse d'images
- rendu de fontes

Polygone de contrôle

Idée : liste de points de contrôle

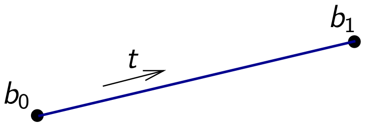


On calcule ensuite des barycentres pondérés

Coefficients t et $(1-t)$, $t \in [0,1]$

Bézier degré 1 = interpolation linéaire

$$f(t) = (1-t)\, b_0 + t\, b_1$$



$$f(0) = b_0$$
$$f(1) = b_1$$

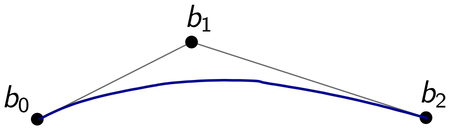
Comment utiliser f ? $\quad b_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \; b_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (1-t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Autrement dit : $\begin{cases} x(t) = (1-t)\, x_0 + t\, x_1 \\ y(t) = (1-t)\, y_0 + t\, y_1 \end{cases}$

Bézier quadratique = degré 2

$$f(t) = (1-t)^2\, b_0 + 2\,(1-t)t\, b_1 + t^2\, b_2$$



$$f(0) = b_0$$
$$f(1) = b_2$$

Tangentes ?

$$f'(t) = 2\,(t-1)\, b_0 + 2\,(1-2t)\, b_1 + 2t\, b_2$$
$$f'(0) = -2\, b_0 + 2\, b_1 = 2\, \overrightarrow{b_0 b_1}$$
$$f'(1) = -2\, b_1 + 2\, b_2 = 2\, \overrightarrow{b_1 b_2}$$

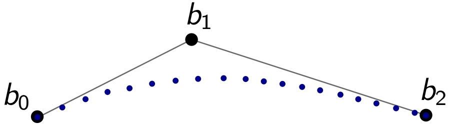
Tracé

$$b_0 = (x_0, y_0) \qquad b_1 = (x_1, y_1) \qquad b_2 = (x_2, y_2)$$

$$x(t) = (1-t)^2\, x_0 + 2\,(1-t)t\, x_1 + t^2\, x_2$$
$$y(t) = (1-t)^2\, y_0 + 2\,(1-t)t\, y_1 + t^2\, y_2$$

Tracé par échantillonnage avec un pas θ petit :

on calcule $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ pour $t = 0\,,\ \theta\,,\ 2\theta\,,\ 3\theta\,,\ \ldots, 1$



puis on relie ces points par des segments.

Base polynomiale

Question : peut-on exprimer tous les polynômes de degré ≤ 2
avec Bézier quadratique ?

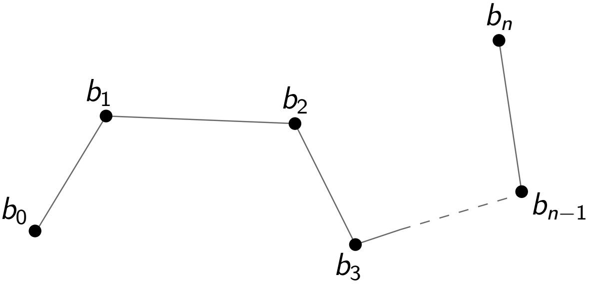
$$f(t) = (1-t)^2\, b_0 + 2\,(1-t)t\, b_1 + t^2\, b_2$$

$$\begin{array}{rcllll} (1-t)^2 & = & 1 & -2t & +t^2 \\ 2(1-t)t & = & 0 & +2t & -2t^2 \\ t^2 & = & 0 & +0 & +t^2 \end{array} \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

Donc ces trois polynômes forment une base des polynômes de degré ≤ 2

Réponse : oui

Bézier de degré n



$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\, b_i$$ b_i = sommets de contrôle

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i}\, t^i$$ polynômes de Bernstein

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$ coefficient binomial

Propriétés

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\, b_i \quad ; \quad B_i^n(t) = \tbinom{n}{i}\,(1-t)^{n-i}\, t^i \quad ; \quad \tbinom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

- $\left\{ B_i^n(t) \;:\; 1 \leqslant i \leqslant n \right\}$ = base polynomiale degré n
- $\dbinom{n}{0} = \dbinom{0}{0} = 1$

$$\Rightarrow\; B_0^n(0) = 1\,, \qquad B_i^n(0) = 0 \quad \forall i > 0 \quad \Rightarrow\; f(0) = b_0$$

$$\Rightarrow\; B_n^n(1) = 1\,, \qquad B_i^n(1) = 0 \quad \forall i < n \quad \Rightarrow\; f(1) = b_n$$

Donc la courbe a pour extrémités b_0 et b_n

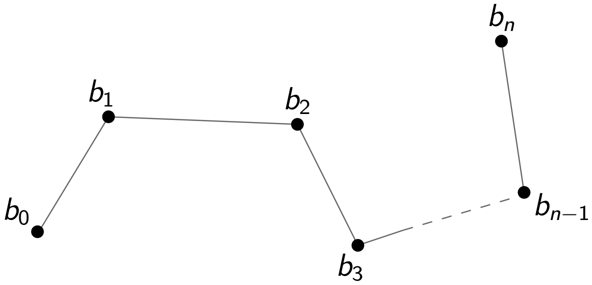
Dérivée

$$f'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} (b_{i+1} - b_i)\, B_i^{n-1}(t)$$

$$B_0^{n-1}(0) = 1\,, \quad B_i^{n-1}(0) = 0 \quad \forall i > 0 \qquad \Rightarrow\ f'(0) = n\,(b_1 - b_0)$$

$$B_{n-1}^{n-1}(1) = 1\,, \quad B_i^{n-1}(1) = 0 \quad \forall i < n-1 \quad \Rightarrow\ f'(1) = n\,(b_n - b_{n-1})$$

Donc la courbe est tangente aux extrémités.

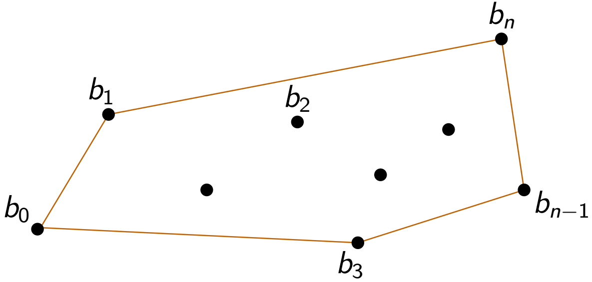


Barycentre pondéré

Propriété : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) \,=\, 1 \quad \forall t$

donc $\displaystyle f(t) = \sum_{i=0}^{n} \; B_i^n(t)\, b_i$ est un barycentre des points de contrôle

donc la courbe est contenue dans $\operatorname{conv}(b_1, \ldots, b_n)$



Invariance affine

Transformation affine (TA) = rotation, symétrie, homothétie, ...

Définition indépendante de tout repère $\Rightarrow$ affinement invariante

TA (courbe (sommets)) = courbe (TA (sommets))

Bézier cubique

Courbes de Bézier les plus utilisées

Degré 3 $\rightarrow$ 4 points de contrôle

$$f(t) = (1-t)^3\, b_0 + 3(1-t)^2 t\, b_1 + 3(1-t)t^2\, b_2 + t^3\, b_3$$

Tracer à la main $\rightarrow$ De Casteljau

3 - Algorithme de De Casteljau

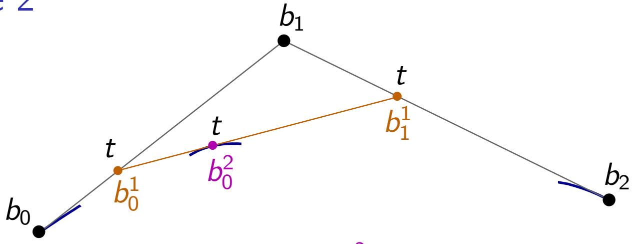
Normalien, ingénieur chez Citroën

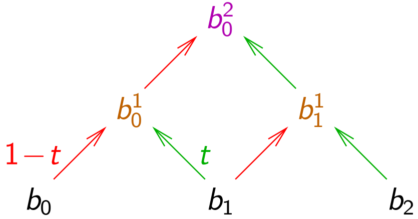
Travaux dans les années 1960 ; secret < 1975 !

Algorithme $=$ calcul récursif des barycentres

Exemple : degré 2

Pour un t fixé



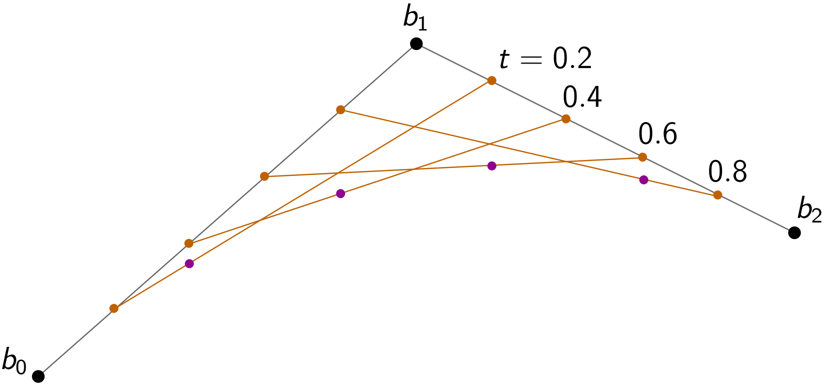


On a : $b_0^2 = (1-t)\, b_0^1 + t\, b_1^1$

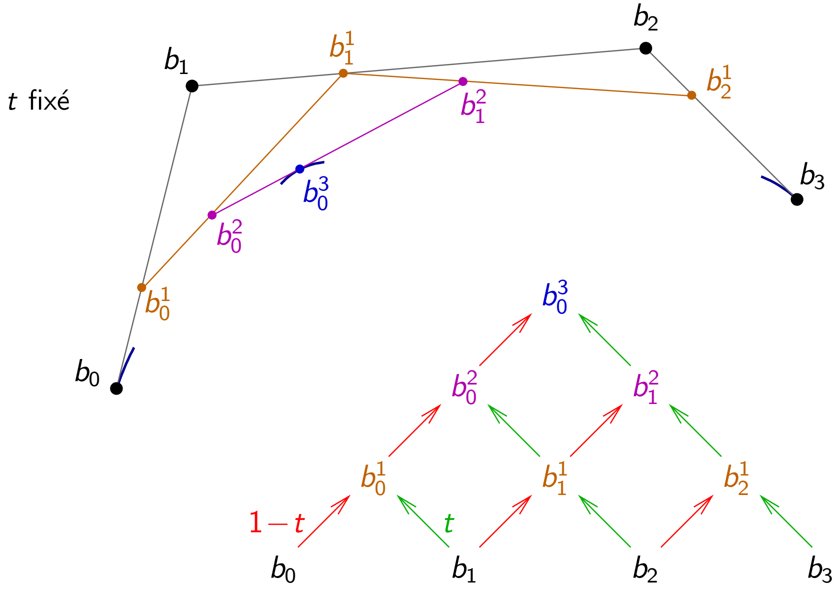
$$= (1-t)\big((1-t)\, b_0 + t\, b_1\big) + t\,\big((1-t)\, b_1 + t\, b_2\big)$$

$$= (1-t)^2\, b_0 + 2(1-t)t\, b_1 + t^2\, b_2 \qquad \text{CQFD}$$

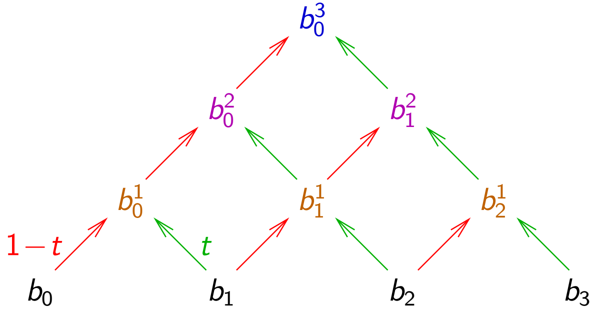
Par échantillonage



Exemple : degré 3



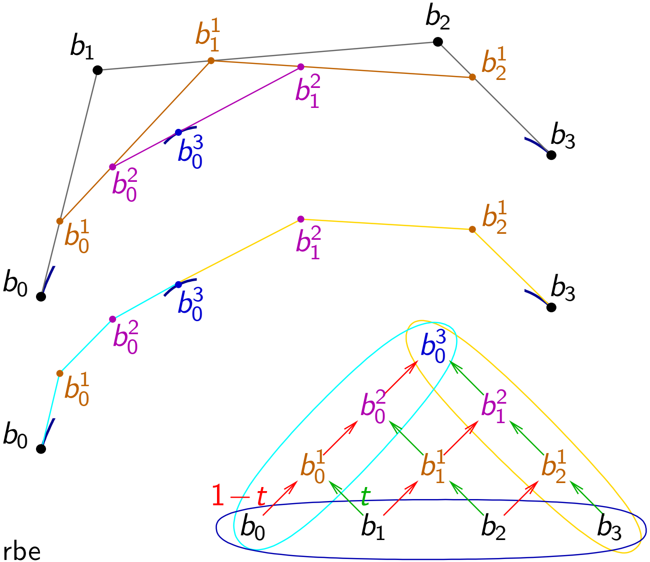
Vérification



On a :
$$\begin{aligned} b_0^3 &= (1-t)\, b_0^2 + t\, b_1^2 \\ &= (1-t)\left((1-t)\, b_0^1 + t\, b_1^1\right) + t\left((1-t)\, b_1^1 + t\, b_2^1\right) \\ &= \dots \\ &= (1-t)^3\, b_0 + 3(1-t)^2 t\, b_1 + 3(1-t)t^2\, b_2 + t^3\, b_3 \qquad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Subdivision d'une Bézier cubique

t fixé



Même courbe
Paramétrisation différente

4 - B-splines cubiques uniformes

Cas particulier des NURBS

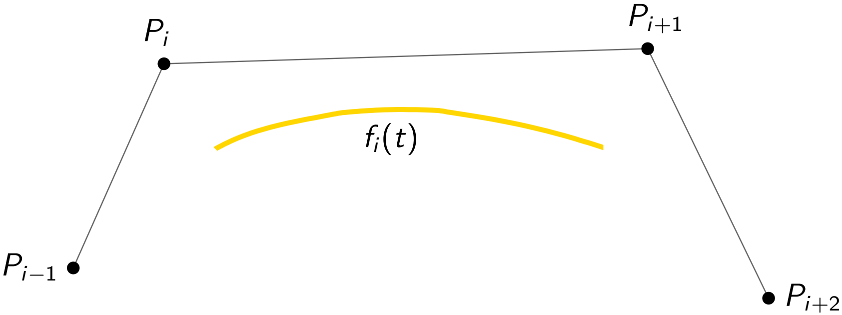
NURBS = Non-Uniform Rational B-Splines ; B = Basis

- Courbes encore plus générales que les Bézier
- mais plus complexes à manipuler

Intérêt ici :

- B-splines cubiques uniformes = concaténation de plusieurs Bézier cubiques
- Donne construction pour assembler des bézier cubiques (G2-continue)

Présentation



La courbe :

- ne passe pas par les extrémités
- est incluse dans conv(sommets)

Formule

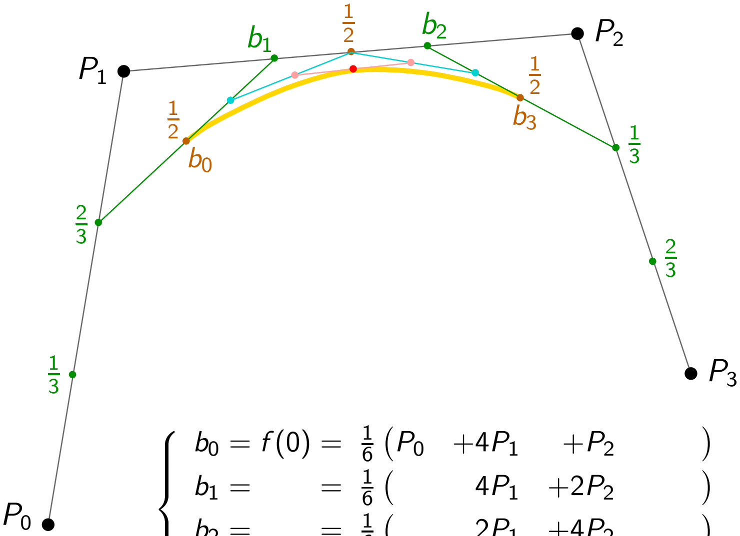
$$f_i(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i-1} \\ P_i \\ P_{i+1} \\ P_{i+2} \end{bmatrix}$$

Points extrémité :

$$f_i(0) = \frac{1}{6}\big(P_{i-1} + 4P_i + P_{i+1}\big)$$

$$f_i(1) = \frac{1}{6}\big(P_i + 4P_{i+1} + P_{i+2}\big)$$

Construction



$$\left\{\begin{array}{lllllll} b_0 = f(0) = & \frac{1}{6}\big(P_0 & +4P_1 & +P_2 & & \big) \\ b_1 = \quad\;\; = & \frac{1}{6}\big(& 4P_1 & +2P_2 & & \big) \\ b_2 = \quad\;\; = & \frac{1}{6}\big(& 2P_1 & +4P_2 & & \big) \\ b_3 = f(1) = & \frac{1}{6}\big(& P_1 & +4P_2 & +P_3 & \big) \end{array}\right.$$

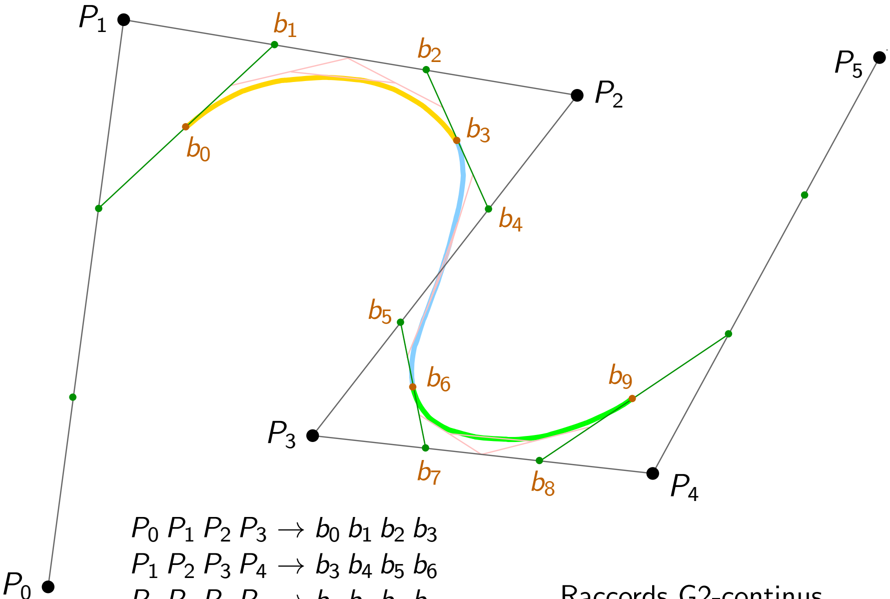
Changement de base

$$\begin{cases} b_0 = f(0) = & \frac{1}{6}\left(P_0 + 4P_1 + P_2\right) \\ b_1 = \quad = & \frac{1}{6}\left(4P_1 + 2P_2\right) \\ b_2 = \quad = & \frac{1}{6}\left(2P_1 + 4P_2\right) \\ b_3 = f(1) = & \frac{1}{6}\left(P_1 + 4P_2 + P_3\right) \end{cases}$$

peut encore s'écrire

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

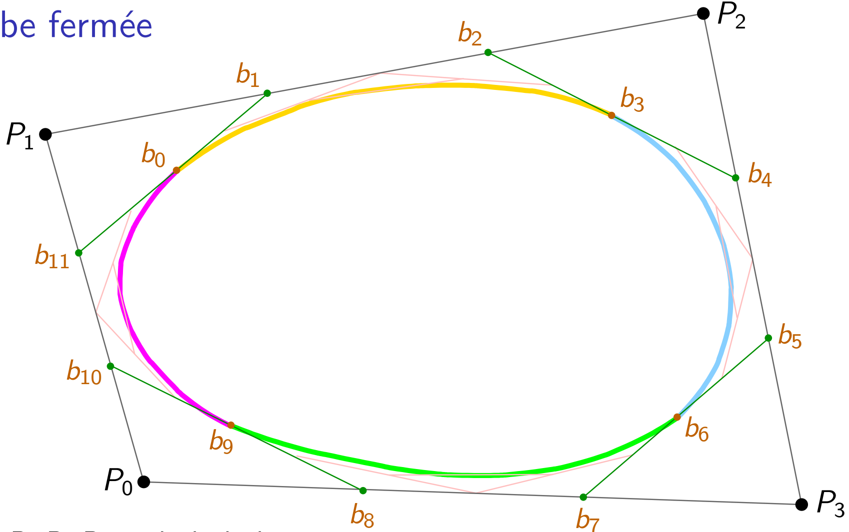
Assemblage de Béziers



$P_0\ P_1\ P_2\ P_3 \to b_0\ b_1\ b_2\ b_3$
$P_1\ P_2\ P_3\ P_4 \to b_3\ b_4\ b_5\ b_6$
$P_2\ P_3\ P_4\ P_5 \to b_6\ b_7\ b_8\ b_9$

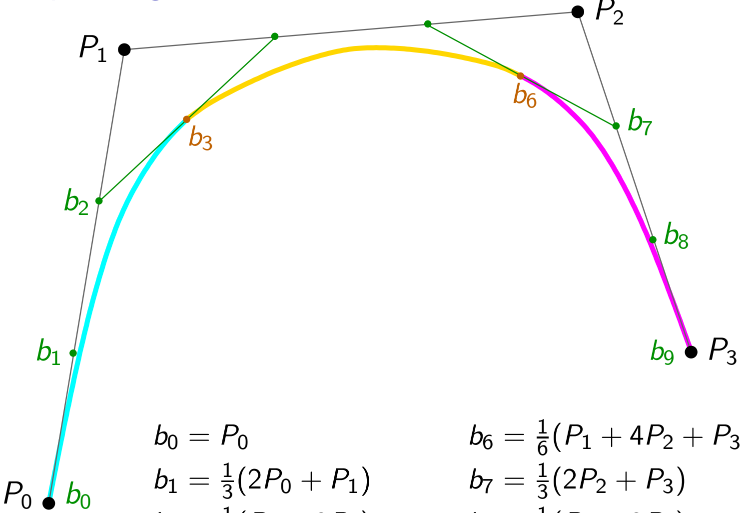
Raccords G2-continus

Courbe fermée



$P_0\ P_1\ P_2\ P_3 \rightarrow b_0\ b_1\ b_2\ b_3$
$P_1\ P_2\ P_3\ P_0 \rightarrow b_3\ b_4\ b_5\ b_6$
$P_2\ P_3\ P_0\ P_1 \rightarrow b_6\ b_7\ b_8\ b_9$
$P_3\ P_0\ P_1\ P_2 \rightarrow b_9\ b_{10}\ b_{11}\ b_0$

Courbe prolongée



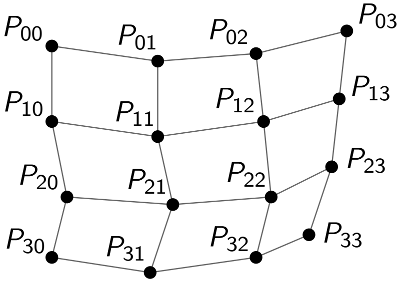
$b_0 = P_0$ $\quad$ $b_6 = \frac{1}{6}(P_1 + 4P_2 + P_3)$

$b_1 = \frac{1}{3}(2P_0 + P_1)$ $\quad$ $b_7 = \frac{1}{3}(2P_2 + P_3)$

$b_2 = \frac{1}{3}(P_0 + 2P_1)$ $\quad$ $b_8 = \frac{1}{3}(P_2 + 2P_3)$

$b_3 = \frac{1}{6}(P_0 + 4P_1 + P_2)$ $\quad$ $b_9 = P_3$

Surface B-spline



16 points de contrôle dans une matrice :

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}$$

Une matrice par coordonnée : P_x, P_y, P_z

$$f(s,t) = \left[\, 1\ s\ s^2\ s^3 \,\right] M_S\, P\, M_S^T \left[\, 1\ t\ t^2\ t^3 \,\right]^T$$

$$\text{où } M_S = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Cylindre : on duplique les trois premières rangées de P.