

# Conception des lignes d'un réseau de transport maritime à l'aide de la PPC

Yousra El Ghazi<sup>1</sup>, Djamel Habet<sup>1</sup>, Cyril Terrioux<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Aix Marseille Univ, Université de Toulon, CNRS, LIS, Marseille, France

prénom.nom@univ-amu.fr

## Résumé

Le problème de conception des lignes d'un réseau de transport maritime consiste, pour un armateur, à déterminer, d'une part, quelles sont les lignes maritimes (sous forme de rotations permettant de desservir un ensemble de ports) à ouvrir, et, d'autre part, l'affectation des navires (porte-conteneurs) avec les tailles adaptées pour les différentes lignes permettant d'acheminer tous les flux de conteneurs. Dans cet article, nous proposons une modélisation de ce problème à l'aide de la programmation par contraintes. Puis, nous présentons une étude préliminaire de sa résolution à l'aide de solveurs de l'état de l'art.

## Mots-clés

Modèle, résolution, application industrielle

## Abstract

The liner shipping network design problem consists, for a shipowner, in determining, on the one hand, which maritime lines (in the form of rotations allowing to serve a set of ports) to open, and, on the other hand, the assignment of ships (container ships) with the adapted sizes for the different lines allowing to carry all the container flows. In this paper, we propose a modeling of this problem using constraint programming. Then, we present a preliminary study of its solving using state-of-the-art solvers.

## Keywords

Model, solving, industrial application

## 1 Introduction

Le transport maritime joue, à l'heure actuelle, un rôle prépondérant dans le commerce mondial. D'après l'organisation maritime internationale (OMI), plus de 80 % des échanges internationaux sont réalisés par voie maritime. Le transport de marchandises conteneurisées constitue la majeure partie de ces échanges. Il repose sur plus de 5 000 porte-conteneurs qui desservent plus de 500 ports à travers le monde. Dans ce contexte, de nombreux problèmes d'optimisation combinatoire [4, 6, 25] peuvent se poser avec des retombées économiques et écologiques non négligeables compte tenu de l'échelle.

Dans cet article, nous nous intéressons à l'un de ces problèmes, à savoir le problème de conception des lignes d'un réseau de transport maritime (appelé LSNDP pour Liner

Shipping Network Design Problem [6]). Une *ligne maritime*, appelée aussi *service*, est définie par une route cyclique (appelée *rotation*) qui visite un ensemble donné de ports dans un ordre déterminé et à horaires réguliers (voir, par exemple, la figure 1). Chaque port est ainsi visité par un navire de la ligne à une fréquence hebdomadaire ou bihebdomadaire. L'ensemble des navires d'une ligne sont supposés homogènes du point de vue de leurs principales caractéristiques (capacité de chargement, vitesse, consommation de carburant, ...). Opérer une ligne à fréquence hebdomadaire dont la rotation dure  $k$  semaines requiert donc  $k$  navires du même type. Étant donné un ensemble de ports, une flotte de porte-conteneurs et un flux de conteneurs (défini par un ensemble de triplets constitués du port d'origine des marchandises, de leur port de destination et du nombre de conteneurs qu'elles représentent), le problème LSNDP consiste, pour un armateur, à déterminer, d'une part, quelles lignes maritimes ouvrir, et, d'autre part, quels navires opérer sur chaque ligne afin d'acheminer tous les flux de conteneurs tout en assurant une fréquence hebdomadaire de visite de chaque port. Il est classé comme étant NP-difficile [5]. Pour donner un ordre d'idée de sa difficulté, nous pouvons noter que, pris séparément, chacun de ses deux sous-problèmes constitue déjà un problème NP-difficile [5, 9]. De plus, d'un point de vue pratique, sa résolution par des méthodes exactes se limite, à l'heure actuelle, à des instances possédant une douzaine de ports au maximum. Bien que récent, ce problème a fait l'objet de nombreux travaux, notamment ces dix dernières années. La plupart sont issus de la recherche opérationnelle. Notons que, dans la littérature, différentes variantes du problème LSNDP sont étudiées selon les hypothèses et propriétés prises en compte (temps de transit, transbordement, vitesse constante ou variable d'une rotation à l'autre ou d'un trajet à l'autre, le type de service, la possibilité de refuser des marchandises, ...).

Différentes approches ont été considérées en s'appuyant souvent sur une modélisation en programmation linéaire (mixte) en nombres entiers (par exemple [16, 17, 18, 19, 21, 24, 26]). Elles reposent principalement sur deux types de formulations. Le premier type de formulation est axé sur les services. L'ensemble des services possibles est calculé en amont et fourni en entrée au modèle. Ce dernier se limite alors à sélectionner les services à conserver parmi les candidats [2]. Le principal inconvénient de ce type de for-

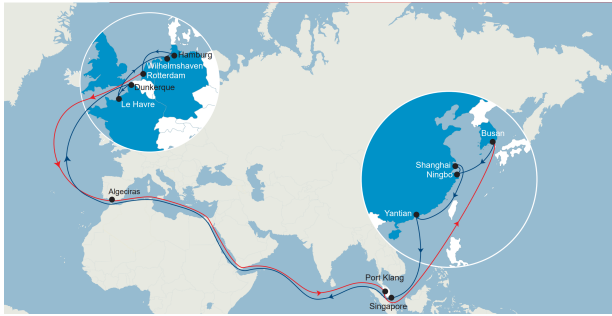


FIGURE 1 – Exemple de ligne reliant l'Asie et l'Europe.

mulation est que le nombre de services possibles croît exponentiellement avec le nombre de ports, ce qui en limite l'intérêt pratique dans le cadre d'une résolution effectuée avec des méthodes complètes. Par contre, il peut avoir son intérêt, dans le cadre de méthodes incomplètes, car on peut alors se contenter de considérer un sous-ensemble des services possibles. En pratique, la solution proposée dans [2] et reposant sur une méthode taboue couplée à la génération de colonnes a permis de traiter des instances allant jusqu'à 120 ports. Le second type de formulation repose sur la sélection des arcs du graphe représentant les liaisons possibles entre chaque paire de ports. Un service est alors défini par les arcs qui le composent, un même arc pouvant être utilisé pour la définition de plusieurs services. D'un point de vue pratique, de telles modélisations couplées à des méthodes complètes [16, 21, 19] permettent de traiter des instances ayant jusqu'à une douzaine de ports [6].

D'autres approches (par exemple [1, 2]) reposent sur des résolutions en deux temps. Le problème LSNDP étant constitué de deux sous-problèmes, elles traitent chaque sous-problème séparément. Par exemple, les approches présentées dans [2, 3, 9, 8] résolvent, dans une première phase, le problème de création des services et, dans une seconde, considèrent l'affectation des navires et la gestion du flux de marchandises en fonction des services trouvés par la première phase. Dans [13], la première phase est consacrée à la gestion du flux tandis que la seconde définit les services. Généralement, la résolution s'effectue en plusieurs passes, la première phase bénéficiant alors d'un retour d'expérience de la part de la seconde phase de la passe précédente. Bien sûr, ce type d'approches relève des méthodes incomplètes. En pratique, ces approches permettent d'obtenir des résultats satisfaisants pour des instances comptant jusqu'à une cinquantaine de ports [6]. Elles s'appuient pour cela sur des heuristiques (par exemple, [3, 9, 8]) ou sur l'algorithme Variable Neighborhood Search (VNS) comme [13].

Au-delà, il existe de nombreux problèmes connexes au problème LSNDP. Par exemple, le problème de tournées de véhicules (appelé VRP pour Vehicle Routing Problem [11]) et ses variantes présentent de fortes similitudes avec le problème LSNDP. En particulier, les tournées sont des circuits et, pour certaines variantes, la charge du véhicule ou des temps de transit peuvent être pris en compte. Dans le transport maritime, le problème de repositionnement de navires (appelé LSFRP pour Liner Shipping Fleet Repositioning

Problem [25]) consiste à déplacer les porte-conteneurs d'un service à un autre tout en tenant compte des marchandises à acheminer, des conteneurs vides à relocaliser et en maximisant la différence entre les revenus et les coûts engendrés. Parmi les approches étudiées pour résoudre ce problème, on peut souligner l'intérêt d'utiliser la programmation par contraintes mis en avant dans [10].

Si les problèmes VRP et LSNDP (et d'autres problématiques liées au transport maritime comme [12, 23]) ont fait l'objet de travaux du point de vue de la programmation par contraintes, ce ne semble pas être le cas pour le problème de conception de réseaux maritimes. Dans cet article, nous proposons un modèle permettant de traiter une version relativement générale du problème LSNDP. Notre modèle considère des vitesses variables d'un trajet à l'autre et prend en compte les transbordements et les temps de transit. Un des objectifs de ce travail est notamment d'étudier l'intérêt que peut avoir la programmation par contraintes pour la modélisation et la résolution de tels problèmes.

Cet article est organisé comme suit. La section 2 introduit les notions nécessaires à la compréhension du papier. Puis, dans la section 3, nous décrivons la modélisation que nous proposons pour le problème LSNDP. Enfin, nous présentons des résultats expérimentaux préliminaires, dans la section 4, avant de conclure dans la section 5.

## 2 Rappels

### 2.1 Programmation par contraintes

Une instance *COP* (Constraint Optimization Problem [22])  $P$  se définit par la donnée d'un quadruplet  $(X, D, C, f)$ .  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  est un ensemble de  $n$  variables. À chaque variable  $x_i$ , on associe un domaine  $D_{x_i}$ , issu de  $D = \{D_{x_1}, \dots, D_{x_n}\}$ , qui contient les valeurs possibles pour  $x_i$ .  $C = \{c_1, \dots, c_e\}$  désigne un ensemble de  $e$  contraintes qui traduisent les interactions entre les variables et définissent les combinaisons de valeurs autorisées. Enfin,  $f$  spécifie le critère à optimiser. Résoudre une instance *COP*  $P = (X, D, C, f)$  revient à essayer de trouver une affectation de toutes les variables de  $X$  satisfaisant toutes les contraintes de  $C$  et optimisant le critère donné par  $f$ . Il s'agit d'un problème NP-difficile.

Un des atouts de la programmation par contraintes réside dans l'existence de contraintes spécialisées (les *contraintes globales*) qui vont faciliter la modélisation des problèmes, mais aussi, leur résolution grâce à des algorithmes de filtrage dédiés. Par la suite, nous exploiterons les contraintes globales suivantes :

- $\text{Alldiff-except}(Y, v)$  qui assure que les valeurs des variables de  $Y$  sont deux à deux distinctes, sauf dans le cas où elles sont égales à  $v$ ,
- $\text{Circuit}(Y)$  qui impose que les valeurs des variables de  $Y$  forment un circuit (au sens graphe du terme) composé d'au moins deux sommets, chaque variable  $y_i$  ayant pour valeur  $i$  si elle ne participe pas au circuit, et  $j$  (avec  $i \neq j$ ) si  $j$  est le successeur de  $i$  dans le circuit,
- $\text{Count}(Y, V) \odot k$  qui assure que le nombre de variables de  $Y$  dont la valeur appartient à  $V$  satisfait la

- condition imposée par la relation  $\odot$  vis-à-vis de  $k$ ,
- $\text{Elt}(Y, i) = k$  qui assure que la  $i$ ème valeur de  $Y$  est égale à  $k$  ( $Y$  pouvant être ici un ensemble de variables ou de valeurs),
- $\text{Elt}_m(Y, i, j) = k$  qui assure la même propriété que  $\text{Elt}$ , mais, pour un ensemble  $Y$  de variables ou de valeurs organisé sous la forme d'une matrice à deux dimensions,
- $\text{Maximum}(Y) = k$  qui assure que la plus grande valeur de  $Y$  est égale à  $k$  ( $Y$  pouvant être ici un ensemble de variables, de valeurs ou d'expressions),
- $\text{Sum}(Y, \Lambda) \odot k$  qui impose que la somme des valeurs de  $Y$  pondérées par les coefficients de  $\Lambda$  satisfait la condition imposée par la relation  $\odot$  vis-à-vis de  $k$ . Par la suite, cette contrainte sera représentée sous la forme plus explicite  $\sum_i \lambda_i \cdot y_i \odot k$ .

## 2.2 Problèmes de conception des lignes

Le transport maritime de ligne consiste à utiliser des navires standardisés qui vont convoier des marchandises, de manière fiable, entre des ports, selon un itinéraire et un horaire préétablis. Il est souvent comparé à un service de transport de passagers régulier, tel qu'un service de train ou de bus, car il fonctionne selon un horaire fixe et assure un service régulier et prévisible pour les expéditeurs et les destinataires des marchandises. Une *ligne maritime*, appelée aussi *service*, est définie par une route cyclique (appelée *rotation*) qui dessert un ensemble de ports donné dans un ordre déterminé et à horaires réguliers. La figure 1 décrit l'exemple d'une ligne reliant l'Asie et l'Europe.

Dans cet article, nous considérons uniquement le transport de marchandises sous leur forme conteneurisée, ce mode de transport constituant l'essentiel du transport de marchandises en termes de quantité et de valeurs. Ainsi, un client qui souhaite transporter des marchandises d'un *port d'origine* (POL) à un *port de destination* (POD) devra les placer à l'intérieur d'un ou plusieurs conteneurs. Les conteneurs présentent l'avantage, pour l'armateur, que leurs dimensions sont standardisées, facilitant ainsi leur manipulation et leur placement à bord des navires spécialisés que sont les porte-conteneurs. Il existe principalement deux tailles de conteneurs : les conteneurs de 20 pieds de long (soit environ 6,1 m) et ceux de 40 pieds (12,2 m) pour une hauteur de 8,6 pieds (2,6 m) et une largeur de 8 pieds (2,4 m). La majorité des conteneurs transportés sont d'une de ces deux tailles. Aussi, l'espace de stockage des navires est divisé en espace unitaire de 40 pieds sur lesquels il est possible d'empiler des unités de 40 pieds comme de 20 pieds. L'équivalent vingt pieds ou EVP (*Twenty-foot Equivalent Unit* ou TEU en anglais) est l'unité généralement employée pour compter une quantité de conteneurs. Un conteneur de 40 pieds compte alors pour 2 EVP.

Du point de vue de l'armateur, chaque marchandise  $k$  est vue comme une quantité  $q(k)$  conteneurs (exprimée en EVP) à acheminer du port d'origine  $pol(k)$  au port de destination  $pod(k)$  en échange d'un revenu  $rev(k)$  par EVP (exprimé en dollars). Ce revenu peut être nul dans le cas des conteneurs vides. Certaines marchandises peuvent avoir un

*temps de transit*  $tt_{max}(k)$  à respecter. Ce temps correspond à la durée maximale autorisée pour leur transport. Généralement, de telles marchandises sont transportées dans le cadre d'offres premium proposées par les armateurs. Précisons qu'un lot de conteneurs envoyé par un client d'un port à un autre ne peut être divisé en plusieurs sous-lots. Enfin, une marchandise peut être acheminée de son port d'origine à son port de destination via l'utilisation successive de différentes lignes. L'opération consistant à décharger une marchandise d'une ligne pour la charger sur une autre ligne est appelée *transbordement*. Elle peut nécessiter de stocker la marchandise plusieurs jours dans le port de transbordement, le temps que le navire de la ligne suivante arrive et la charge à son bord. Elle peut donc engendrer des frais (voir les coûts de transbordement ci-dessous) et allonger les temps de trajet.

Concernant les navires, les porte-conteneurs sont regroupés par type de navires ayant des caractéristiques identiques ou similaires. Ainsi, chaque classe  $v$  est caractérisée par sa *capacité*  $\kappa(v)$  (c'est-à-dire le nombre maximal de conteneurs (en EVP) pouvant être transportés), son *taux d'affrètement journalier*  $tc(v)$  (correspondant au coût journalier d'utilisation du navire), son *intervalle de vitesses possibles*  $[\nu_{min}(v), \nu_{max}(v)]$  (en nœuds), sa *consommation horaire*  $cons(v, \nu)$  de carburant pour le moteur principal (en tonnes par heure), pour chaque *type de carburant*  $fuel(v)$  et pour chaque vitesse  $\nu$  possibles. Concernant la consommation, d'autres paramètres qui pourraient avoir un impact comme la force du vent, les courants marins, le tirant d'eau ou la charge à bord du navire sont ignorés. Ces paramètres peuvent être variables dans le temps et difficilement anticipables, les lignes étant définies généralement à l'échelle d'une année.

Chaque port  $p$  possède également ses propres caractéristiques, à savoir sa *productivité*  $prod(p, v)$  (c'est-à-dire le nombre de conteneurs chargés ou déchargés par heure pour des navires de type  $v$ ), son temps d'attente  $wt(p, v)$  (temps de mouillage avant de pouvoir rentrer dans le port), ses *temps de manœuvre*  $man^{in}(p, v)$  et  $man^{out}(p, v)$  respectivement pour entrer dans le port et pour en sortir, ses *frais d'escale*  $pc(p, v)$  (en dollars), son *coût de transbordement*  $ts(p)$  (en dollars). Les temps sont exprimés en heures et dépendent du type  $v$  de navires, tout comme les frais d'escale. Les canaux  $c$  (comme ceux de Suez ou de Panama) se caractérisent par un temps d'attente  $wt(c, v)$ , par une durée de traversée  $trav(c)$  (en heures) et par un coût d'utilisation  $pc(c, v)$  (en dollars).

Le nombre de navires opérant sur une ligne est déterminé en fonction de la durée de la rotation du service et de la fréquence de départs. En effet, une rotation doit garantir une fréquence régulière de visite de chaque port qu'elle dessert. Cette *fréquence de rotation* est généralement hebdomadaire ou bihebdomadaire. Pour une fréquence hebdomadaire, la durée de la rotation doit être égale à un multiple de sept jours. Le nombre de navires déployés par rotation doit alors être égal au nombre de semaines que dure cette rotation. Par exemple, la ligne présentée dans la figure 1 a une durée de 91 jours, soit 13 semaines. Elle est donc opérée avec 13

navires.

Le problème de conception de réseau de transport maritime de ligne (LSNDP) peut être défini comme suit : Étant donné un ensemble de *ports*, un ensemble de *navires* répartis par type (chaque type  $v$  disposant de  $nb(v)$  navires) et un ensemble de *marchandises* à acheminer, définir un ensemble de rotations ayant une fréquence hebdomadaire et déterminer les navires les opérant afin de transporter les marchandises tout en respectant, le cas échéant, les temps de transit et en maximisant le bénéfice. Le bénéfice est défini comme la différence entre les revenus apportés par les marchandises transportées et l'ensemble des coûts engendrés par ce transport (frais de carburant, frais d'utilisation des navires, frais d'escales et d'utilisation des canaux, frais de transbordements, ...). Pour calculer les frais de carburant, pour chaque type  $f$  de carburant, on dispose du prix  $fp(f)$  de la tonne de carburant (exprimé en dollars).

Si la finalité première de ce problème est de concevoir des réseaux de transport maritime, il peut être également employé pour aider à la prise de décision. Par exemple, il permet de simuler des situations comme des embouteillages pour entrer dans certains ports et de déterminer s'il est pertinent ou non d'adapter les rotations existantes. Il permet aussi d'envisager des évolutions du flux de conteneurs à transporter, d'évaluer l'intérêt de la prise de parts de marché sur certains flux de marchandises ou encore d'anticiper la construction de nouveaux navires.

## 3 Modèle

### 3.1 Choix de modélisation

Dans notre modèle, nous reprenons les hypothèses usuelles de la littérature. Notamment, nous considérons que tous les porte-conteneurs d'un type de bateaux donné possèdent des caractéristiques identiques et que la fréquence des services est hebdomadaire. Par ailleurs, nous faisons le choix de traiter les canaux (comme ceux de Suez ou de Panama) de la même manière que les ports. Le temps de traversée d'un canal remplace alors le temps de chargement/déchargement du bateau dans un port. Il en résulte que la notion de rotation prend désormais aussi en compte les canaux. Une rotation pouvant passer plusieurs fois par le même canal, mais pas par le même port, nous considérons, dans notre modèle, deux instances de chaque canal de sorte qu'un canal puisse être emprunté aussi bien à « l'aller » qu'au « retour ». Par exemple, on peut voir que la ligne représentée dans la figure 1 passe deux fois par le canal de Suez, une fois à « l'aller » (trajet bleu) et une fois au « retour » (trajet rouge). Notons que créer plus de deux instances d'un même canal n'a que peu d'intérêt, car une solution passant plus de deux fois par le même canal a peu de chance d'être optimale.

Notre modèle prend, en entrées, toutes les informations relatives aux infrastructures (ports et canaux), au flux de marchandises, aux types de bateaux et aux distances entre paires d'infrastructure. Il repose également sur le nombre maximal  $r_{max}$  de rotations à définir, la durée maximale  $h_{max}$  (en heures) pour accomplir une rotation et le nombre maximum  $ts_{max}$  de transbordements autorisés. Une des particularités de ce modèle est que les principales opéra-

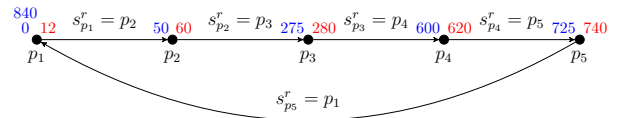


FIGURE 2 – Exemple de rotation entre cinq ports.

tions seront horodatées avec, pour objectif, de calculer des temps de rotation ou de transit des marchandises aussi précis que possible. Par ailleurs, notre modèle prend en compte des vitesses variables d'un trajet à un autre. Enfin, il tient compte de la possibilité de refuser une marchandise dans le réseau si son transport n'est pas rentable ou est impossible. Par la suite, compte tenu du nombre important de variables, nous définissons les variables au fur et à mesure des besoins. L'ensemble des ports est noté  $\mathcal{P} = \{0, 1, \dots, |\mathcal{P}| - 1\}$ , celui des canaux  $\mathcal{C} = \{c, c + |\mathcal{C}_0| \text{ t.q. } c \in \mathcal{C}_0\}$  (avec  $\mathcal{C}_0 = \{|\mathcal{P}|, \dots, |\mathcal{P}| + |\mathcal{C}_0| - 1\}$  l'ensemble des canaux avant duplication), celui des types de bateaux disponibles  $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, |\mathcal{V}|\}$  et celui des marchandises  $\mathcal{K} = \{1, 2, \dots, |\mathcal{K}|\}$ . Nous notons respectivement  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{I}^+$  les ensembles d'indices  $[0, ts_{max}]$  et  $[0, ts_{max} + 1]$ .

### 3.2 Définition des rotations et des routes

Notre modèle n'utilise pas nécessairement toutes les  $r_{max}$  rotations possibles. Aussi, nous considérons une variable  $v_r$  par rotation  $r$ . Elle aura pour valeur un entier compris entre 1 et  $|\mathcal{V}|$  représentant le type de bateaux exploité si la rotation est utilisée, 0 sinon. Chaque rotation  $r$  doit correspondre à un circuit. Pour définir de tels circuits, nous introduisons une variable  $s_p^r$  par infrastructure  $p$  et par rotation  $r$ . Elle a pour valeur  $p$  si le port/canal  $p$  n'intervient pas dans le circuit, le port/canal successeur de  $p$  sinon. La figure 2 illustre ceci pour une rotation entre cinq ports. Pour prendre en compte le cas où la rotation  $r$  n'est pas utilisée, nous introduisons deux ports factices  $f_1$  et  $f_2$  afin de satisfaire la contrainte `Circuit`. Les domaines des variables  $s_p^r$  (pour  $p \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \cup \{f_1, f_2\}$ ) sont définies de sorte que les ports factices ne peuvent être successeurs des ports de  $\mathcal{P}$  ou des canaux de  $\mathcal{C}$  et réciproquement. Le domaine pour les ports factices est donc réduit à  $\{f_1, f_2\}$ . Ainsi, pour chaque rotation  $r$ , l'existence d'un circuit peut être garantie grâce à la contrainte :

$$\text{Circuit}(\{s_p^r | p \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \cup \{f_1, f_2\}\}) \quad (\text{R.1})$$

Notons que cette contrainte permet d'éviter l'existence de sous-tour. Ensuite, nous devons garantir que, pour une rotation utilisée, le circuit ne porte que sur des ports et des canaux et que, pour une rotation non utilisée, il ne repose que sur les deux ports factices :

$$v_r = 0 \iff s_{f_1}^r = f_2 \wedge s_{f_2}^r = f_1 \quad (\text{R.2})$$

$$\forall p \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C}, v_r = 0 \Rightarrow s_p^r = p \quad (\text{R.3})$$

Une rotation ne peut pas reposer que sur des canaux :

$$\sum_{p \in \mathcal{P} \cup \{f_1, f_2\}} (s_p^r \neq p) \geq 2 \quad (\text{R.4})$$

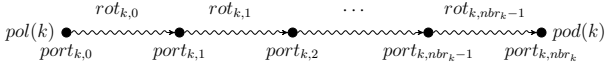


FIGURE 3 – Transport d’une marchandise  $k$  de son port d’origine  $pol(k)$  à son port de destination port  $pod(k)$ .

### 3.3 Flux de marchandises

Notre modèle prévoit la possibilité de ne pas transporter une marchandise  $k$  si cela ne s’avère pas possible ou pas rentable. Pour cela, nous définissons une variable booléenne  $\alpha_k$  qui sera vraie si la marchandise  $k$  est prise en charge, fausse sinon. Prendre en charge la marchandise  $k$  signifie qu’elle va être chargée au port d’origine  $pol(k)$  et déchargée au port de destination  $pod(k)$  en transitant éventuellement par des ports intermédiaires. Dans notre modélisation, nous ne considérons que les ports intermédiaires où la marchandise va être transbordée comme illustré dans la figure 3. Aussi, nous introduisons une variable  $rot_{k,i}$  par marchandise  $k$  et par étape  $i$  pour représenter la  $i$ ème rotation utilisée pour le transport de la marchandise  $k$ . La variable  $rot_{k,i}$  a pour valeur le numéro de la rotation utilisée (entre 0 et  $r_{max} - 1$ ) lors de la  $i$ ème étape, -1 si une telle étape n’est pas nécessaire. Nous considérons également des variables  $port_{k,i}$ . La variable  $port_{k,i}$  représente le port où la marchandise  $k$  intègre la  $i$ ème rotation utilisée tandis que  $port_{k,i+1}$  correspond au port où elle quitte sa  $i$ ème rotation. Ces variables ont pour valeur le port  $p$  correspondant ( $p \in \mathcal{P}$ ) si la  $i$ ème rotation est employée, -1 sinon. Pour chaque marchandise  $k$ , une variable  $nbr_k$  spécifie le nombre de rotations employées (entre 0 et  $ts_{max} + 1$ ). Nous pouvons maintenant définir les contraintes associées. Une marchandise  $k$  est acceptée dans le réseau si et seulement s’il existe au moins une rotation qui la transporte :

$$\alpha_k = 1 \iff nbr_k > 0 \quad (\text{F.1})$$

Le port de départ d’une marchandise  $k$  transporté est nécessairement son port d’origine  $pol(k)$  :

$$\alpha_k = 1 \iff port_{k,1} = pol(k) \quad (\text{F.2})$$

En revanche, si elle n’est pas acceptée, il n’y a pas de premier port :

$$\alpha_k = 0 \iff port_{k,1} = -1 \quad (\text{F.3})$$

Le dernier port utilisé est forcément le port de destination  $pod(k)$ .

$$nbr_k > 0 \Rightarrow \text{Elt}(\{port_{k,i+1} | i \in \mathcal{I}\}, nbr_k) = pod(k) \quad (\text{F.4})$$

Aucun port ou rotation n’est utilisé au-delà du port de destination :

$$i \geq nbr_k \iff rot_{k,i} = -1 \quad (\text{F.5})$$

$$i > nbr_k \Rightarrow port_{k,i} = -1 \quad (\text{F.6})$$

$$port_{k,i} = -1 \Rightarrow i \geq nbr_k \quad (\text{F.7})$$

Par ailleurs, une marchandise ne peut pas transiter plusieurs fois par le même port ou par la même rotation :

$$\text{Alldiff-except}(\{port_{k,i} | i \in \mathcal{I}^+\}, -1) \quad (\text{F.8})$$

$$\text{Alldiff-except}(\{rot_{k,i} | i \in \mathcal{I}\}, -1) \quad (\text{F.9})$$

Afin de faciliter l’expression de certaines contraintes relatives au trajet suivi par les marchandises, nous introduisons des variables booléennes  $from_{k,p}^r$  (resp.  $to_{k,p}^r$ ) qui sont vraies si la marchandise  $k$  entre dans (resp. sort de) la rotation  $r$  au port  $p$ , fausses sinon. Ces variables sont liées aux précédentes ainsi :

$$from_{k,p}^r = \sum_{i \in \mathcal{I}} (port_{k,i} = p) \cdot (rot_{k,i} = r) \quad (\text{F.10})$$

$$to_{k,p}^r = \sum_{i \in \mathcal{I}} (port_{k,i+1} = p) \cdot (rot_{k,i} = r) \quad (\text{F.11})$$

Ces variables sont également employées pour lier le flux de marchandises à la définition des routes. En effet, si une marchandise  $k$  est (dé)chargée au niveau d’un port  $p$  pour une rotation  $r$ , cela implique que le port  $p$  est utilisé dans cette rotation :

$$from_{k,p}^r = 1 \Rightarrow s_p^r \neq p \quad (\text{F.12})$$

$$to_{k,p}^r = 1 \Rightarrow s_p^r \neq p \quad (\text{F.13})$$

Réciproquement, si un port  $p$  est utilisé dans une rotation  $r$ , alors il existe au moins une marchandise qui est (dé)chargée dans ce port pour cette rotation :

$$s_p^r \neq p \Rightarrow \text{Count}(\{port_{k,i} | k \in \mathcal{K}, i \in \mathcal{I}^+\}, \{p\}) \geq 1 \quad (\text{F.14})$$

$$s_p^r \neq p \Rightarrow \text{Count}(\{rot_{k,i} | k \in \mathcal{K}, i \in \mathcal{I}\}, \{r\}) \geq 1 \quad (\text{F.15})$$

Enfin, si une rotation n’est pas utilisée, aucune marchandise ne peut transiter par son biais, et réciproquement :

$$v_r = 0 \iff \text{Count}(\{rot_{k,i} | k \in \mathcal{K}, i \in \mathcal{I}^+\}, \{r\}) = 0 \quad (\text{F.16})$$

### 3.4 Propriétés des rotations et des navires

Dans certains modèles MIP de la littérature (par exemple [6]), chaque service est associé à un type de bateaux prédéfini. Si ce choix facilite la prise en compte des spécificités de chaque type de navires, il conduit à considérer de nombreuses rotations dont peu seront utilisées au final. Dans notre modélisation, nous avons fait le choix de laisser le solveur décider du type de navires associé à chaque rotation. Aussi, il faut s’assurer de la concordance du type de navires retenu pour une rotation et des caractéristiques de la rotation. Cela nécessite d’introduire un certain nombre de variables dont les valeurs seront fixées ensuite à l’aide de contraintes  $\text{Elt}$ . La variable  $\kappa_r$  représente la capacité maximale (exprimée en EVP) de marchandises transportables via la rotation  $r$ . Elle a pour valeur 0 si la rotation n’est pas utilisée, la capacité du type de navires utilisé sinon. Les variables  $v_{min}^r$  et  $v_{max}^r$  spécifient les vitesses minimale et maximale de la rotation  $r$  (0 si la rotation n’est

pas exploitée). La variable  $fp_r$  exprime le prix de la tonne de carburant pour la rotation  $r$  (0 si la rotation n'est pas exploitée). Pour chaque rotation  $r$ , nous posons alors les contraintes suivantes :

$$\text{Elt}(\{0\} \cup \{\kappa(v)|v \in \mathcal{V}\}, v_r) = \kappa_r \quad (\text{P.1})$$

$$\text{Elt}(\{0\} \cup \{\nu_{min}(v)|v \in \mathcal{V}\}, v_r) = \nu_{min}^r \quad (\text{P.2})$$

$$\text{Elt}(\{0\} \cup \{\nu_{max}(v)|v \in \mathcal{V}\}, v_r) = \nu_{max}^r \quad (\text{P.3})$$

$$\text{Elt}(\{0\} \cup \{fp(fuel(v))|v \in \mathcal{V}\}, v_r) = fp_r \quad (\text{P.4})$$

De même, certaines informations (frais d'escale, temps d'attente, ...) relatives aux ports ou aux canaux dépendent également du type de navires associé à la rotation  $r$ . Pour chaque rotation  $r$ , nous introduisons les variables  $wt_{p,r}$ ,  $man_{p,r}^{in}$  et  $man_{p,r}^{out}$  qui spécifient respectivement le temps d'attente du port ou du canal  $p$  et le temps de manœuvre pour entrer et sortir du port  $p$ . Le coût d'escale au port  $p$  pour la rotation  $r$  est représentée par la variable  $pc_{p,r}$  tandis que la productivité pour le port  $p$  et la rotation  $r$  est exprimée par la variable  $prod_{p,r}$ .

$$\text{Elt}(\{0\} \cup \{wt(p, v)|v \in \mathcal{V}\}, v_r) = wt_{p,r} \quad (\text{P.5})$$

$$\text{Elt}(\{0\} \cup \{man^{in}(p, v)|v \in \mathcal{V}\}, v_r) = man_{p,r}^{in} \quad (\text{P.6})$$

$$\text{Elt}(\{0\} \cup \{man^{out}(p, v)|v \in \mathcal{V}\}, v_r) = man_{p,r}^{out} \quad (\text{P.7})$$

$$\text{Elt}(\{0\} \cup \{pc(p, v)|v \in \mathcal{V}\}, v_r) = pc_{p,r} \quad (\text{P.8})$$

$$\text{Elt}(\{-1\} \cup \{prod(p, v)|v \in \mathcal{V}\}, v_r) = prod_{p,r} \quad (\text{P.9})$$

Enfin, nous considérons la variable  $tc_r$  qui, pour chaque rotation  $r$ , spécifie le coût journalier d'utilisation des navires associés à la rotation.

$$\text{Elt}(\{0\} \cup \{tc(v)|v \in \mathcal{V}\}, v_r) = tc_r \quad (\text{P.10})$$

### 3.5 Charge des navires

Nous devons garantir qu'à la sortie de chaque port, les navires ne sont pas chargés au-delà de leur capacité maximale. Cela nécessite de savoir, pour chaque rotation, quelles sont les marchandises qu'elle transporte à la sortie de chaque port. Pour cela, nous utilisons une variable booléenne  $leave_{k,p}^r$  par marchandise  $k$ , par port  $p$  et par rotation  $r$ . Cette variable est vraie si la marchandise  $k$  quitte le port  $p$  à bord de la rotation  $r$ , fausse sinon. Les contraintes (C.1) et (C.2) traitent les cas où la marchandise est respectivement chargée et déchargée de la rotation  $r$  tandis que la contrainte (C.3) garantit la transitivité tout le long du trajet. Enfin, la contrainte (C.4) correspond au cas où un port  $p$  ne figure pas dans la rotation  $r$ .

$$from_{k,p}^r = 1 \Rightarrow leave_{k,p}^r = 1 \quad (\text{C.1})$$

$$to_{k,p}^r = 1 \Rightarrow leave_{k,p}^r = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$(s_p^r = p' \wedge from_{k,p'}^r = 0 \wedge to_{k,p'}^r = 0) \Rightarrow leave_{k,p}^r = leave_{k,p'}^r \quad (\text{C.3})$$

$$s_p^r = p \Rightarrow leave_{k,p}^r = 0 \quad (\text{C.4})$$

La contrainte suivante nous permet maintenant d'assurer que, pour chaque port  $p$ , la charge, à la sortie du port, ne dépasse pas la capacité maximale  $\kappa_r$  de la rotation  $r$  :

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} q(k).leave_{k,p}^r \leq \kappa_r \quad (\text{C.5})$$

## 3.6 Horodatage et temps de transit

### 3.6.1 Durée des opérations au port et de traversée des canaux

Pour exprimer la durée des opérations de chargement/déchargement dans un port ou la durée de traversée d'un canal, nous introduisons une variable  $t_p^r$  par port ou canal  $p$  et par rotation  $r$ . Dans le cas d'un canal, la valeur de cette variable est définie comme égale à la durée de la traversée si le canal est utilisé, 0 sinon :

$$t_p^r = trav(p).(s_p^r \neq p) \quad (\text{T.1})$$

Pour un port  $p$ , deux cas de figure sont envisageables. Si le port n'est pas utilisé dans la rotation  $r$ , la variable  $t_p^r$  vaut 0 (voir la contrainte (T.2)). Sinon, sa valeur dépend de la quantité de marchandises chargées et déchargées dans le port  $p$  pour la rotation  $r$ . Pour calculer cette quantité, nous considérons la variable  $teu_{p,r}$  qui indique la quantité en EVP de marchandises chargées et déchargées dans le port  $p$  pour la rotation  $r$ , et la contrainte (T.3). Nous pouvons alors calculer la durée des opérations grâce à la contrainte (T.4). Un mouvement de grue permet de déplacer un conteneur quelle que soit sa taille. Afin de prendre en compte l'existence de conteneurs de 20 pieds et de 40 pieds parmi les marchandises à traiter, le paramètre  $\mu$  permet de calculer le nombre de conteneurs à manipuler et donc le nombre de mouvements de grues nécessaires à partir du nombre de conteneurs exprimé en EVP.

$$s_p^r = p \iff t_p^r = 0 \quad (\text{T.2})$$

$$teu_{p,r} = \sum_{k \in \mathcal{K}} (from_{k,p}^r + to_{k,p}^r).q(k) \quad (\text{T.3})$$

$$s_p^r \neq p \Rightarrow t_p^r = \left\lceil \frac{\mu.teu_{p,r}}{prod_{p,r}} \right\rceil \quad (\text{T.4})$$

### 3.6.2 Horaires des escales

Pour établir les horaires de chaque escale, il est nécessaire de désigner un port comme port de départ dans chaque rotation. Pour cela, nous considérons une variable  $dep_r$  par rotation  $r$  qui aura, pour valeur, un port  $p$  si la rotation est utilisée, -1 sinon. Le choix du port de départ étant purement arbitraire, nous choisissons celui de plus grand indice.

$$v_r = 0 \iff dep_r = -1 \quad (\text{T.5})$$

$$v_r > 0 \Rightarrow \text{Maximum}(\{p.(s_p^r \neq p)|p \in \mathcal{P}\}) = dep_r \quad (\text{T.6})$$

Dans notre modélisation, nous considérons deux moments clés : le moment où le navire arrive à quai (resp. entre dans le canal) et le moment où il le quitte (resp. sort du canal). Pour chaque rotation  $r$  et chaque port ou canal  $p$ , ces deux moments sont représentés respectivement par les variables  $time_{p,r}^{in}$  et  $time_{p,r}^{out}$  qui prennent leurs valeurs dans  $[0, h_{max}]$ . Pour chaque rotation, nous considérons que l'instant 0 coïncide avec le moment d'arrivée à quai dans le port de départ grâce à la contrainte suivante :

$$dep_r = p \Rightarrow time_{p,r}^{in} = 0 \quad (\text{T.7})$$

Le moment de sortie ne dépend que du moment d'arrivée et de la durée des opérations au port ou de traversée du canal :

$$time_{p,r}^{out} = time_{p,r}^{in} + t_p^r \quad (T.8)$$

Ensuite, pour déterminer le temps d'arrivée à un port ou un canal en fonction du temps de sortie du port ou canal qui le précède dans la rotation, nous devons calculer le temps de trajet en fonction de la vitesse du navire. Les variables  $st_p^r$  et  $\nu_p^r$  représentent respectivement le temps de trajet pour aller du port  $p$  à son successeur (s'il en existe un) dans la rotation  $r$  et la vitesse (exprimée en nœuds) utilisée sur ce trajet. Les deux variables sont corrélées par la contrainte suivante :

$$s_p^r = p' \Rightarrow st_p^r = \left\lceil \frac{\delta(p,p')}{\nu_p^r} \right\rceil \quad (T.9)$$

Les vitesses employées doivent être conformes aux possibilités des navires opérant la rotation :

$$(v_r > 0 \wedge s_p^r \neq p) \Rightarrow \nu_p^r \geq \nu_{min}^r \quad (T.10)$$

$$v_r > 0 \Rightarrow \nu_p^r \leq \nu_{max}^r \quad (T.11)$$

Nous pouvons, à présent, définir le moment d'arrivée au port ou canal  $p'$  en fonction de son prédécesseur  $p$  dans la rotation  $r$  :

$$(s_p^r = p' \wedge p' \neq dep_r) \Rightarrow time_{p',r}^{in} = time_{p,r}^{out} + man_{p,r}^{out} + st_p^r + wt_{p',r} + man_{p',r}^{in} \quad (T.12)$$

À noter que pour les canaux, nous considérons que les variables  $man_{p,r}^{in}$  et  $man_{p,r}^{out}$  valent 0. Cela nous permet de ne pas avoir à décliner la contrainte précédente selon les différentes possibilités de successions de ports et de canaux.

Dans le cas où un port  $p$  n'est pas exploité dans une rotation  $r$ , nous fixons les valeurs des variables  $st_p^r$ ,  $\nu_p^r$  et  $time_{p,r}^{in}$  à la valeur 0 :

$$s_p^r = p \iff st_p^r = 0 \quad (T.13)$$

$$s_p^r = p \Rightarrow time_{p,r}^{in} = 0 \quad (T.14)$$

$$s_p^r = p \iff \nu_p^r = 0 \quad (T.15)$$

Enfin, si une marchandise  $k$  est chargée dans la rotation  $r$  au port  $p$  et déchargée au port  $p'$ , cela impose que l'arrivée au port  $p$  a lieu avant l'arrivée au port  $p'$  si le trajet entre  $p$  et  $p'$  ne passe pas par le port de départ de la rotation  $r$ . Si ce trajet passe par le port de départ, alors, l'arrivée au port  $p'$  aura lieu lors de la rotation suivante, et l'arrivée au port  $p$  se situe entre les deux visites du port  $p'$ . Par exemple, si on considère la rotation de la figure 2 (qui dure 840 heures) et une marchandise envoyée du port  $p_2$  au port  $p_4$ , un navire effectuant cette rotation entre dans le port  $p_2$  à l'heure 50 (en bleu) et arrive dans le port  $p_4$  à l'heure 600. Dans ce cas, on a bien  $time_{p_2,r}^{in} < time_{p_4,r}^{in}$ . Par contre, si on considère une marchandise allant de  $p_4$  à  $p_3$ , le bateau entre le port  $p_3$  à l'heure 275 avant de visiter  $p_4$ . Cette marchandise ne sera donc délivrée qu'au prochain passage du bateau à l'heure

1 115. On a alors  $time_{p_3,r}^{in} < time_{p_4,r}^{in} < time_{p_3,r}^{in} + T_r$ . Cela se traduit par la contrainte suivante :

$$(from_{k,p}^r = 1 \wedge to_{k,p'}^r = 1) \Rightarrow (time_{p,r}^{in} < time_{p',r}^{in} \vee time_{p',r}^{in} < time_{p,r}^{in} < time_{p',r}^{in} + T_r) \quad (T.16)$$

### 3.6.3 Temps de transit des marchandises

Pour calculer précisément le temps de transit des marchandises, nous avons besoin de connaître les moments clés de leur transport, à savoir quand elles sont chargées à bord d'une rotation ou déchargées. Pour simplifier la modélisation, nous considérons qu'une marchandise est chargée à bord d'une rotation au moment où la rotation quitte le port et qu'elle est déchargée au moment où la rotation arrive au port. Ces deux moments sont représentés respectivement par les variables  $ctime_{i,k}^{in}$  et  $ctime_{i,k}^{out}$ . Les deux contraintes suivantes assurent la correspondance entre les moments clés des rotations et des marchandises :

$$\text{El}t_m(\{time_{p,r}^{out} | p \in \mathcal{P}, r \in R\}, port_{k,i}, rot_{k,i}) = ctime_{i,k}^{in} \quad (T.17)$$

$$\text{El}t_m(\{time_{p,r}^{in} | p \in \mathcal{P}, r \in R\}, port_{k,i+1}, rot_{k,i}) = ctime_{i,k}^{out} \quad (T.18)$$

Le temps passé par la marchandise  $k$  dans sa  $i$ ème rotation est représenté par la variable  $\delta_{i,k}$ . Il correspond naturellement à la différence entre le moment de sortie et le moment d'entrée. Toutefois, il faut tenir compte du cas particulier où le trajet passe par le port de départ. Dans ce cas, la marchandise sera déchargée lors de la prochaine rotation. Par exemple, si on considère l'exemple précédent, une marchandise envoyée du port  $p_2$  au port  $p_4$  quitte le port  $p_2$  à l'heure 60 (en rouge) et arrive dans le port  $p_4$  à l'heure 600 (en bleu). Cela donne un temps de trajet de 540 heures. Par contre, une marchandise expédiée du port  $p_4$  au port  $p_3$  quitte le port  $p_4$  à l'heure 620 et arrive au port  $p_3$  à l'heure 1 115 et met donc 495 heures pour arriver à destination. La contrainte (T.19) traite le premier cas et la contrainte (T.20) le second.

$$ctime_{i,k}^{in} \leq ctime_{i,k}^{out} \Rightarrow \delta_{i,k} = ctime_{i,k}^{out} - ctime_{i,k}^{in} \quad (T.19)$$

$$(rot_{k,i} = r \wedge ctime_{i,k}^{in} > ctime_{i,k}^{out}) \Rightarrow \delta_{i,k} = ctime_{i,k}^{out} - ctime_{i,k}^{in} + T_r \quad (T.20)$$

Dans le cas de figure où un transbordement a lieu, il faut considérer le temps que la marchandise passe à quai entre les deux rotations. Compte tenu de la fréquence hebdomadaire des rotations, ce temps peut être de l'ordre d'une semaine au maximum. Pour le calculer plus finement, nous introduisons une variable  $\Delta_{i,k}$  par marchandise  $k$  et par  $i$ ème rotation utilisée. Calculer la valeur de cette variable nécessite de prendre en compte la fréquence hebdomadaire des rotations. Par exemple, considérons une marchandise  $k$  qui arrive à un port  $p$  à l'heure 200 (d'après sa valeur  $ctime_{i,k}^{out}$ ) sur une rotation  $r$  et le quitte à l'heure 2 000

(d'après sa valeur  $ctime_{i+1,k}^{in}$ ) via une rotation  $r'$ . La fréquence hebdomadaire des rotations  $r$  et  $r'$  implique qu'en pratique la marchandise  $k$  quittera le port à l'heure 320. La contrainte (T.21) prend en compte ce cas de figure tandis que la contrainte (T.22) traite le cas où l'arrivée dans le port est postérieure au départ du port (d'après les valeurs  $ctime_{i,k}^{out}$  et  $ctime_{i+1,k}^{in}$ ).

$$(i + 1 < nbr_k \wedge ctime_{i+1,k}^{in} \geq ctime_{i,k}^{out}) \Rightarrow \Delta_{i,k} = (ctime_{i+1,k}^{in} - ctime_{i,k}^{out}) \% (7 \times 24) \quad (T.21)$$

$$(i + 1 < nbr_k \wedge ctime_{i+1,k}^{in} < ctime_{i,k}^{out}) \Rightarrow \Delta_{i,k} = 7 \times 24 + (ctime_{i,k}^{out} - ctime_{i+1,k}^{in}) \% (7 \times 24) \quad (T.22)$$

Les  $i$ èmes rotations qui ne sont pas utilisées pour la marchandise  $k$  ont une variable  $\Delta_{i,k}$  qui est nulle :

$$i + 1 \geq nbr_k \Rightarrow \Delta_{i,k} = 0 \quad (T.23)$$

Le temps de transit de la marchandise  $k$  peut alors être garanti grâce à la contrainte suivante :

$$\sum_{i \in \mathcal{I}^+} \delta_{i,k} + \sum_{i \in \mathcal{I}} \Delta_{i,k} \leq tt_{max}(k) \quad (T.24)$$

À noter que toutes les marchandises n'ont pas nécessairement une contrainte de temps de transit à respecter. Aussi, si une marchandise  $k$  ne se voit pas imposer un temps de transit maximum, les variables et contraintes présentées dans cette partie ne sont pas considérées pour la marchandise  $k$ .

### 3.7 Disponibilité des navires

La fréquence des rotations étant hebdomadaire, chaque port est visité par un bateau de la rotation chaque semaine. Le nombre de bateaux nécessaires correspond donc au temps total de la rotation divisé par 7. Si les variables  $n_r$  et  $T_r$  représentent respectivement le nombre de porte-conteneurs utilisés par la rotation  $r$  et le temps total de la rotation  $r$ , nous pouvons poser la contrainte suivante :

$$n_r = \left\lceil \frac{T_r}{7 \times 24} \right\rceil \quad (D.1)$$

Le temps de la rotation est, bien entendu, nul si la rotation n'est pas utilisée :

$$v_r = 0 \iff T_r = 0 \quad (D.2)$$

Sinon, chaque rotation démarrant au temps 0, le temps total est calculé à partir du moment d'arrivée au port de départ en provenance du dernier port de la rotation :

$$dep_r = p' \wedge s_p^r = p' \Rightarrow T_r = time_{p,r}^{out} + man_{p,r}^{out} + st_p^r + wt_{p',r} + man_{p',r}^{in} \quad (D.3)$$

Enfin, nous devons garantir que, pour chaque type de bateaux, le nombre de bateaux utilisés ne dépasse pas le nombre de navires disponibles :

$$\sum_{r \in R} n_r \cdot (v_r = v) \leq nb(v) \quad (D.4)$$

### 3.8 Fonction objectif

Sommairement, la fonction objectif consiste à faire la différence entre les revenus apportés par l'acceptation des marchandises dans le réseau et l'ensemble des coûts qu'engendrent leur transport (carburant, exploitation des navires, escales, ...).

Pour calculer le coût lié au carburant, nous devons, au préalable, déterminer la consommation de carburant de chaque trajet réalisé. Pour cela, nous considérons une variable  $cons_p^r$  par port et par rotation qui spécifie la quantité de carburant consommée par heure par la rotation  $r$  pour le trajet réalisé entre le port  $p$  et son successeur. En l'absence de successeurs, la variable  $cons_p^r$  a, bien sûr, une valeur nulle. La quantité consommée dépend ici uniquement du type de bateaux utilisés et de la vitesse.

$$cons_p^r = \text{Elt}_m(\{cons(v, \nu) | v \in \{0\} \cup \mathcal{V}, \nu \in \{0\} \cup [\nu_{min}(v), \nu_{max}(v)]\}, v_r, \nu_p^r) \quad (O.1)$$

Nous supposons ici que  $cons(v, \nu)$  vaut 0 si  $v$  vaut 0 ou si  $\nu$  vaut 0.

Pour calculer les coûts liés au transbordement, nous devons connaître la quantité de marchandises transbordées dans chaque port. Pour cela, nous introduisons une variable  $teu_p^{ts}$  par port. Les marchandises  $k$  transbordées au port  $p$  sont celles qui sont déchargées au port  $p$  (c'est-à-dire celles pour lesquelles  $to_{k,p}^r$  vaut 1) et pour lesquelles le port  $p$  n'est pas leur port de destination. Nous pouvons donc poser la contrainte suivante :

$$teu_p^{ts} = \sum_{k \in \mathcal{K} | p \neq pod(k)} to_{k,p}^r \cdot q(k) \quad (O.2)$$

Nous pouvons maintenant exprimer notre fonction objectif dans laquelle figurent les revenus (R), les coûts liés au carburant (C), les frais d'escales dans les ports et de passage par les canaux (E), les frais d'exploitations des navires (X) et les frais de transbordement (T) :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k \in \mathcal{K}} rev(k) \cdot q(k) \cdot \alpha_k & (R) \\ & - \sum_{r \in R} \sum_{p \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C}} fp_r \times cons_p^r \times st_p^r & (C) \\ & - \sum_{r \in R} \sum_{p \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C}} pc_{pr} \cdot (s_p^r \neq p) & (E) \\ & - 7 \sum_{r \in R} tc_r \cdot n_r & (X) \\ & - \sum_{p \in \mathcal{P}} ts(p) \cdot teu_p^{ts} & (T) \end{aligned}$$

### 3.9 Contraintes additionnelles

Compte tenu de l'ampleur de l'espace de recherche, il peut être souhaitable d'éviter autant que possible certaines symétries. Commencer chaque rotation au temps 0 (voir la contrainte (T.7)) permet d'éviter toute translation sur l'axe du temps. Toutefois, d'autres symétries peuvent exister. Par exemple, les variables  $v_r$  sont interchangeables. Pour éviter cela, nous pouvons faire en sorte que les premières rotations soient utilisées en priorité grâce à la contrainte suivante :

$$v_r = 0 \Rightarrow v_{r+1} = 0 \quad (S.1)$$



Il est également possible d'imposer une condition plus forte sur les rotations en posant la contrainte suivante :

$$T_1 \geq T_2 \geq \dots \geq T_r \quad (\text{S.2})$$

Certains ports ne peuvent pas accueillir certains types de bateaux. Par exemple, le port de Dutch Harbor en Alaska n'est pas suffisamment profond. Il ne peut donc accueillir que de petits porte-conteneurs. Aussi, si les bateaux de type  $v$  ne peuvent accoster au port  $p$ , nous posons, pour chaque rotation  $r$ , la contrainte suivante :

$$v_r = v \Rightarrow s_p^r = p \quad (\text{S.3})$$

De même, certains ports ne disposent pas d'une place suffisante pour stocker des conteneurs. Il est donc impossible d'y effectuer des transbordements. Pour de tels ports, nous pouvons alors poser la contrainte suivante pour interdire tout transbordement :

$$teu_p^{ts} = 0 \quad (\text{S.4})$$

## 4 Premières expérimentations

Le jeu d'instances LINER-LIB [5] constitue la référence pour les expérimentations concernant le problème LSNDP. Il est constitué de sept instances ayant de 12 à 197 ports, permettant ainsi d'évaluer aussi bien des méthodes complètes qu'incomplètes. Afin d'avoir des instances de taille raisonnable et variée, nous avons produit des sous-instances à partir d'instances du jeu LINER-LIB. Pour cela, à partir d'une instance, nous sélectionnons  $n$  ports de la manière suivante. Le premier port sélectionné est celui qui échange le plus de marchandises. Les  $n - 1$  ports suivants sont ceux qui échangent le plus de marchandises avec les ports déjà sélectionnés. Pour notre jeu de tests, nous avons ainsi considéré la plus petite instance (*Baltic*) du jeu LINER-LIB et 21 instances produites à partir des instances *Baltic*, *WAF* et *Mediterranean* avec un nombre de ports à allant de 3 à 10 pour les deux premières et de 3 à 6 pour la dernière. Le nombre de rotation  $r_{max}$  est fixé à 4 et celui des transbordements à 2 (une valeur supérieure n'étant pas souhaitée par les experts) tandis que la durée maximale  $h_{max}$  est de 1 344 heures (soit 8 semaines). Nous prenons la valeur 0,54 pour  $\mu$ .

Pour pouvoir évaluer plus facilement différents solveurs, nous avons implémenté notre modèle (incluant les contraintes (S.3) et (S.4)) dans l'API PyCSP3 [15]. Pour nos premières expérimentations, nous avons considéré les solveurs ACE (version 2.1 [14]) et Choco (version 4.10.11 [20]). ACE est utilisé avec son paramétrage par défaut tandis que Choco est exploité avec l'heuristique de choix de variables CHS [7] et l'heuristique de choix de valeur lexicographique, les choix par défaut de Choco ayant tendance à considérer prioritairement des solutions de coût négatif. Les expérimentations sont réalisées sur des serveurs DELL PowerEdge R440 dotés de processeurs Intel Xeon Silver 4112 cadencés à 2,6 GHz et dotés de 32 Go de mémoire avec un temps d'exécution d'une heure au maximum.

La table 1 présente les résultats obtenus. Pour les plus petites instances, les deux solveurs parviennent généralement

Instance	P	ACE		Choco	
		Rés.	Tps	Rés.	Tps
subinstance Baltic	3	OPT	16	OPT	18
	4	OPT	23	OPT	174
	5	OPT	202	SAT	3 600
	6	-	-	SAT	3 600
	7	-	-	SAT	3 600
	8	-	-	SAT	3 600
	9	-	-	SAT	3 600
10	-	-	SAT	3 600	
Baltic	12	-	-	-	-
subinstance WAF	3	OPT	12	OPT	7
	4	OPT	45	OPT	154
	5	SAT	3 600	SAT	3 600
	6	-	-	SAT	3 600
	7	-	-	SAT	3 600
	8	-	-	SAT	3 600
	9	-	-	SAT	3 600
10	-	-	SAT	3 600	
subinstance Mediterranean	3	OPT	12	OPT	17
	4	OPT	21	OPT	58
	5	-	-	OPT	180
	6	-	-	OPT	271

TABLE 1 – Résultats et temps d'exécution (en secondes) des solveurs ACE et Choco.

à trouver l'optimum et, dans ce cas, ACE s'avère plus rapide que Choco. Malheureusement, ACE ne parvient pas à traiter les autres instances du fait du nombre de variables et de valeurs qui devient trop important vis-à-vis de la manière dont ACE représente les décisions prises durant la résolution. Choco, pour sa part, se révèle plus robuste, mais, ne parvient pas à traiter l'instance *Baltic*, l'amplitude de la fonction objectif devenant trop important (certains coûts pouvant être de l'ordre de plusieurs millions).

Le passage par l'API PyCSP3 nous a permis de tester rapidement plusieurs solveurs. Toutefois, compte tenu des variables et contraintes auxiliaires générées par les solveurs lors de la lecture des instances, il est clair qu'une implémentation fine du modèle directement au sein des solveurs sera nécessaire pour obtenir une approche compétitive.

## 5 Conclusions et perspectives

Dans cet article, nous avons proposé un modèle basé sur la PPC permettant de traiter le problème LSNDP. Les résultats que nous avons obtenus sont très préliminaires et devront être étendus à d'autres solveurs. Ils permettent toutefois d'esquisser plusieurs pistes. Les premières visent à implémenter le modèle directement au sein des solveurs, à mieux maîtriser l'amplitude de la fonction objectif ou encore à casser certaines symétries. Par ailleurs, il faudra envisager d'autres approches pour sa résolution (résolution successive d'instances CSP, VNS, ...). Enfin, le modèle devra être étendu pour prendre en compte les contraintes imposées par l'OMI concernant les émissions de gaz des navires.

## Remerciements

Ce travail est soutenu par Bpifrance dans le cadre du projet PIA Transformation Numérique du Transport Maritime (TNTM).

## Références

- [1] R. Agarwal and Ö. Ergun. Ship Scheduling and Network Design for Cargo Routing in Liner Shipping. *Transportation Science*, 42(2) :175–196, 2008.
- [2] J. F. Álvarez. Joint routing and deployment of a fleet of container vessels. *Maritime Economics & Logistics*, 11(2) :186–208, 2009.
- [3] B. D. Brouer, G. Desaulniers, C. V. Karsten, and D. Pisinger. A Matheuristic for the Liner Shipping Network Design Problem with Transit Time Restrictions. In *Computational Logistics - 6th International Conference, ICCL*, volume 9335 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 195–208. Springer, 2015.
- [4] B. D. Brouer, C. V. Karsten, and D. Pisinger. Optimization in liner shipping. *Annals of Operations Research*, 271(1) :205–236, 2018.
- [5] B. D. Brouer, J. F. Álvarez, C. E. M. Plum, D. Pisinger, and M. M. Sigurd. A base integer programming model and benchmark suite for liner-shipment network design. *Transportation Science*, 48(2) :281–312, 2014.
- [6] M. Christiansen, E. O. Hellsten, D. Pisinger, D. Sacramento, and C. Vilhelmsen. Liner shipping network design. *European Journal of Operational Research*, 286, 2020.
- [7] D. Habet and C. Terrioux. Conflict history based heuristic for constraint satisfaction problem solving. *Journal of Heuristics*, 27(6) :951–990, 2021.
- [8] C. V. Karsten, B. D. Brouer, G. Desaulniers, and D. Pisinger. Time constrained liner shipping network design. *Transportation Research. Part E : Logistics and Transportation Review*, 105 :152–162, 2017.
- [9] C. V. Karsten, D. Pisinger, S. Røpke, and B. D. Brouer. The time constrained multi-commodity network flow problem and its application to liner shipping network design. *Transportation Research Part E : Logistics and Transportation Review*, 76 :122–138, 2015.
- [10] E. Kelareva, K. Tierney, and P. Kilby. CP methods for scheduling and routing with time-dependent task costs. *EURO Journal on Computational Optimization*, 2(3) :147–194, 2014.
- [11] P. Kilby and P. Shaw. Vehicle Routing. In F. Rossi, P. van Beek, and T. Walsh, editors, *Handbook of Constraint Programming*, volume 2 of *Foundations of Artificial Intelligence*, pages 801–836. Elsevier, 2006.
- [12] D. Kizilay, P. Van Hentenryck, and D. Türsel Eliiyi. Constraint programming models for integrated container terminal operations. *European Journal of Operational Research*, 286(3) :945–962, 2020.
- [13] A. Krosggaard, D. Pisinger, and J. Thorsen. A flow-first route-next heuristic for liner shipping network design. *Networks*, 72(3) :358–381, 2018.
- [14] C. Lecoutre. Ace, a generic constraint solver. *CoRR*, abs/2302.05405, 2023.
- [15] C. Lecoutre and N. Szczepanski. PYCSP3 : modeling combinatorial constrained problems in python. *CoRR*, abs/2009.00326, 2020.
- [16] Q. Meng and S. Wang. Liner shipping service network design with empty container repositioning. *Transportation Research Part E : Logistics and Transportation Review*, 47(5) :695–708, 2011.
- [17] Q. Meng and S. Wang. Optimal operating strategy for a long-haul liner service route. *European Journal of Operational Research*, 215(1) :105–114, 2011.
- [18] C. E. M. Plum, D. Pisinger, J. J. Salazar-González, and M. M. Sigurd. Single liner shipping service design. *Computers & Operations Research*, 45 :1–6, 2014.
- [19] C. E. M. Plum, D. Pisinger, and M. M. Sigurd. A service flow model for the liner shipping network design problem. *European Journal of Operational Research*, 235(2) :378–386, 2014.
- [20] C. Prud'homme and J.-G. Fages. Choco-solver : A java library for constraint programming. *J. Open Source Softw.*, 7(78) :4708, 2022.
- [21] L. B. Reinhardt and D. Pisinger. A branch and cut algorithm for the container shipping network design problem. *Flexible Services and Manufacturing Journal*, 24(3) :349–374, 2012.
- [22] F. Rossi, P. van Beek, and T. Walsh. *Handbook of Constraint Programming*. Elsevier, 2006.
- [23] D. Sacramento, C. Solnon, and D. Pisinger. Constraint Programming and Local Search Heuristic : a Matheuristic Approach for Routing and Scheduling Feeder Vessels in Multi-terminal Ports. *Annals of Operations Research*, 1(4), 2020.
- [24] K. Thun, H. Andersson, and M. Christiansen. Analyzing complex service structures in liner shipping network design. *Flexible Services and Manufacturing Journal*, 29(3-4) :535–552, 2017.
- [25] K. Tierney. *Optimizing Liner Shipping Fleet Repositioning Plans*, volume 57 of *Operations research / computer science interfaces series*. Springer, 2015.
- [26] S. Wang and Q. Meng. Liner shipping network design with deadlines. *Computers & Operations Research*, 41 :140–149, 2014.