

Examen de 2ème session du module RFIDEC

Christophe Gonzales

Durée : 2 heures

Seuls documents autorisés :

Les transparents de cours. Calculatrices autorisées.

Exercice A (6 points)

Soit quatre variables aléatoires X, Y, Z, T , de modalités respectives $\{x_1, x_2\}$, $\{y_1, y_2\}$, $\{z_1, z_2\}$ et $\{t_1, t_2\}$. La probabilité jointe de ces quatre variables est fournie dans le tableau suivant :

	y_1				y_2			
	z_1		z_2		z_1		z_2	
	t_1	t_2	t_1	t_2	t_1	t_2	t_1	t_2
x_1	0,0192	0,1728	0,0384	0,0096	0,0768	0,0512	0,0160	0,0160
x_2	0,0144	0,1296	0,0288	0,0072	0,2016	0,1344	0,0420	0,0420

Q A.1 Déterminez si T est indépendant de X conditionnellement au couple de variables

(Y, Z) . Vous justifierez bien évidemment votre réponse.

Il faut commencer par calculer $P(Y, Z)$:

	z_1	z_2
y_1	0,336	0,084
y_2	0,464	0,116

Ensuite, on peut calculer $P(X, T|Y, Z)$:

	y_1				y_2			
	z_1		z_2		z_1		z_2	
	t_1	t_2	t_1	t_2	t_1	t_2	t_1	t_2
x_1	0,05714	0,51428	0,45714	0,11428	0,16551	0,11034	0,13793	0,13793
x_2	0,04285	0,38571	0,34285	0,08571	0,43448	0,28965	0,36206	0,36206

Pour chaque valeur de Y, Z , on s'aperçoit que les lignes et les colonnes de la matrice ci-dessus sont proportionnelles. Donc T est indépendant de X conditionnellement à Y, Z .

Q A.2 Déterminez si Z est indépendant du couple (X, Y) . Vous justifierez bien évidemment votre réponse.

On commence par calculer $P(Z, X, Y)$:

	y_1		y_2	
	z_1	z_2	z_1	z_2
x_1	0,192	0,048	0,128	0,032
x_2	0,144	0,036	0,336	0,084

On remarque que, pour tout $x \in \{x_1, x_2\}$ et pour tout $y \in \{y_1, y_2\}$, on a $P(x, y, z_1) = 4P(x, y, z_2)$. Donc Z est indépendant de (X, Y) .

Q A.3 Sachant que X n'est pas indépendant de Y , quel est le réseau bayésien représentant la loi jointe des variables X, Y, Z, T .

Le réseau est : $X \rightarrow Y \rightarrow T \leftarrow Z$.

Exercice B (4 points)

Un phénomène physique est mesuré sur une échelle allant de $-\infty$ à $+\infty$. On a mesuré 100 occurrences du phénomène. Ces mesures étant imprécises, on les a reporté dans les intervalles suivants :

intervalle] - 3, -1.5]] - 1.5, 0]]0, 2[[2, 3.5[[3.5, 5[
occurrences	1	12	67	18	2

Q B.1 Grâce à un test d'ajustement de niveau de confiance 90%, déterminez si le phénomène suit une loi normale $\mathcal{N}(1, 1)$.

On commence par recentrer le tableau ci-dessus de manière à se ramener à une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Ensuite, on calcule, grâce à la table de la loi normale, les probabilités d'être dans les différents intervalles ainsi que le nombre d'occurrences que l'on devrait observer si le phénomène suivait bien la loi normale :

intervalle] - 4, -2.5]] - 2.5, -1]] - 1, 1[[1, 2.5[[2.5, 4[
probas $\mathcal{N}(0, 1)$	0,0062	0,1525	0,6826	0,1525	0,0062
occurrences théoriques	0,62	15,25	68,26	15,25	0,62
occurrences observées	1	12	67	18	2

La statistique d'ajustement d^2 vaut donc 4,51628. Or $d_\alpha^4 = 7,78$. Donc, à ce niveau de confiance, on peut en déduire que le phénomène aléatoire suit bien un loi $\mathcal{N}(1, 1)$.