Examen de 2ème session du module RFIDEC

Christophe Gonzales

Durée : 2 heures

Seuls documents autorisés :
Les transparents de cours. Calculatrices autorisées.

Exercice A (6 points)

Soit quatre variables aléatoires X, Y, Z, T, de modalités respectives $\{x_1, x_2\}$, $\{y_1, y_2\}$, $\{z_1, z_2\}$ et $\{t_1, t_2\}$. La probabilité jointe de ces quatre variables est fournie dans le tableau suivant :

	y_1				y_2			
	z_1		z_2		z_1		z_2	
	t_1	t_2	t_1	t_2	t_1	t_2	t_1	t_2
x_1	$0,0192$	$0,1728$	$0,0384$	$0,0096$	$0,0768$	$0,0512$	$0,0160$	$0,0160$
x_2	$0,0144$	$0,1296$	$0,0288$	$0,0072$	$0,2016$	$0,1344$	$0,0420$	$0,0420$

Q A.1 Déterminez si T est indépendant de X conditionnellement au couple de variables (Y, Z). Vous justifierez bien évidemment votre réponse.

Il faut commencer par calculer $P(Y, Z)$:

	z_1	z_2
y_1	$0,336$	$0,084$
y_2	$0,464$	0.116

Ensuite, on peut calculer $P(X, T|Y, Z)$:

	y_1				y_2			
	z_1		z_2		z_1		z_2	
	t_1	t_2	t_1	t_2	t_1	t_2	t_1	t_2
x_1	$0,05714$	$0,51428$	$0,45714$	$0,11428$	$0,16551$	$0,11034$	$0,13793$	$0,13793$
x_2	$0,04285$	$0,38571$	$0,34285$	$0,08571$	$0,43448$	$0,28965$	$0,36206$	$0,36206$

Pour chaque valeur de Y, Z, on s'aperçoit que les lignes et les colonnes de la matrice ci-dessus sont proportionnelles. Donc T est indépendant de X conditionnellement à Y, Z.

Q A.2 Déterminez si Z est indépendant du couple (X, Y). Vous justifierez bien évidemment votre réponse.

On commence par calculer $P(Z, X, Y)$:

	y_1		y_2	
	z_1	z_2	z_1	z_2
x_1	$0,192$	$0,048$	$0,128$	0.032
x_2	$0,144$	$0,036$	$0,336$	$0,084$

On remarque que, pour tout $x \in \{x_1, x_2\}$ et pour tout $y \in \{y_1, y_2\}$, on a $P(x, y, z_1) = 4P(x, y, z_2)$. Donc Z est indépendant de (X, Y).

Q A.3 Sachant que X n'est pas indépendant de Y, quel est le réseau bayésien représentant la loi jointe des variables X, Y, Z, T.

Le réseau est : $X \rightarrow Y \rightarrow T \leftarrow Z$.

Exercice B (4 points)

Un phénomène physique est mesuré sur une échelle allant de $-\infty$ à $+\infty$. On a mesuré 100 occurrences du phénomène. Ces mesures étant imprécises, on les a reporté dans les intervalles suivants :

intervalle	$]-3, -1.5]$	$]-1.5, 0]$	$]0, 2[$	$[2, 3.5[$	$[3.5, 5[$
occurrences	1	12	67	18	2

Q B.1 Grâce à un test d'ajustement de niveau de confiance 90%, déterminez si le phénomène suit une loi normale $\mathcal{N}(1, 1)$.

On commence par recentrer le tableau ci-dessus de manière à se ramener à une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Ensuite, on calcule, grâce à la table de la loi normale, les probabilités d'être dans les différents intervalles ainsi que le nombre d'occurrences que l'on devrait observer si le phénomène suivait bien la loi normale :

intervalle	$]-4, -2.5]$	$]-2.5, -1]$	$]-1, 1[$	$[1, 2.5[$	$[2.5, 4[$
probas $\mathcal{N}(0, 1)$	0,0062	0,1525	0,6826	0,1525	0,0062
occurrences théoriques	0,62	15,25	68,26	15,25	0,62
occurrences observées	1	12	67	18	2

La statistique d'ajustement d^2 vaut donc 4,51628. Or $d^4_\alpha = 7, 78$. Donc, à ce niveau de confiance, on peut en déduire que le phénomène aléatoire suit bien un loi $\mathcal{N}(1, 1)$.