Examen de 2ème session du module RFIDEC

Christophe Gonzales

Durée : 2 heures

Seuls documents autorisés :
Les transparents de cours. Calculatrices autorisées.

Exercice A (5 points)

On a observé le nombre d'occurrences de pannes d'appareils électroniques au cours des 3 dernières années :

2	7	3	4	1	3	5	5	3	7

Q A.1 On suppose que la distribution du nombre d'occurrences des pannes suit une loi de Poisson. Rappel : si une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. En utilisant l'échantillon ci-dessus, estimez par maximum de vraisemblance la valeur de λ.

La vraisemblance est égale à $L(\mathbf{x},\lambda) = \pi(\mathbf{x}|\lambda) = \prod_{i=1}^{10} P(x_i|\lambda) = \prod_{i=1}^{10} \left[\lambda^{x_i} e^{-\lambda}/x_i!\right]$. Par conséquent, la log-vraisemblance est égale à $\ln L(\mathbf{x},\theta) = \sum_{i=1}^{10} (x_i \ln\lambda - \lambda - \ln(x_i!)) = \left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right) \ln\lambda - 10\lambda - \sum_{i=1}^{10} \ln(x_i!)$. Donc :

$$\frac{\partial \ln L(\mathbf{x},\theta)}{\partial\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{\lambda} - 10 = 0 \Longrightarrow \lambda_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10}.$$

D'après le tableau ci-dessus, $\sum_{i=1}^{10} x_i = 40$. Donc $\lambda_{MV} = 4$.

Q A.2 On a maintenant un *a priori* sous la forme d'une loi Gamma de densité $g(x) = \frac{10^{11}}{\Gamma(11)} x^{10} e^{-10x}$. Estimez par maximum a posteriori la valeur de λ.

Le maximum a posteriori est défini par :

$$\lambda_{MAP} = \mathrm{Argmax}_\lambda \pi(\mathbf{x}|\lambda)\pi(\lambda) = \mathrm{Argmax}_\lambda \left(\prod_{i=1}^{10} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}\right) \frac{10^{11}}{\Gamma(11)} x^{10} e^{-10x}.$$

En passant au log, on doit donc optimiser $\sum_{i=1}^{10} \left(\sum_{i=1}^{10} x_i \ln\lambda - \lambda - \ln(x_i!)\right) + \ln\frac{10^{11}}{\Gamma(11)} +$

$10 \ln \lambda - 10\lambda$. En dérivant par rapport à λ, et en fixant cette dérivée à 0, on obtient :

$$\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{\lambda} - 10 + \frac{10}{\lambda} - 10 = 0.$$

Autrement dit, on doit résoudre $\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i + 10}{\lambda} - 10 = 0$. Donc $\lambda_{MAP} = (\sum_{i=1}^{10} x_i + 10)/20 = 50/20 = 2,5$.

Exercice B (5 points)

Le propriétaire X d'une maison possède une alarme (détecteur de bruit) afin de protéger celle-ci. D'après son constructeur, lorsqu'il y a cambriolage, il y a 80% de chances pour que l'alarme se déclenche et il y a 10% de chances qu'elle le fasse lorsqu'il n'y a pas cambriolage. Par ailleurs, d'après la préfecture de police, dans ce quartier, une maison a statistiquement 5% de chances d'être cambriolée. Enfin, des mesures sonores prises par la mairie ont montré qu'à tout moment de la journée, il y a 10% de chances pour qu'on entende une alarme dans ce quartier.

Q B.1 Monsieur X est proche de chez lui et entend son alarme se déclencher. Il se demande alors quelle est, dans ces conditions, la probabilité qu'il y ait effectivement un cambrioleur chez lui. Écrivez la formule correspondant à cette probabilité, puis calculez sa valeur.

Retranscrivons l'énoncé en termes de probabilités. Appelons $C \in \{c, \overline{c}\}$ la variable « cambriolage », $A \in \{a, \overline{a}\}$ la variable « alarme ». Alors :

$$P(A = a|C = c) = 0,8 \quad P(A = \overline{a}|C = c) = 0,2 \quad P(A = a|C = \overline{c}) = 0,1 \quad P(A = \overline{a}|C = \overline{c})$$
$$P(C = c) = 0,05 \quad P(C = \overline{c}) = 0,95 \quad P(A = a) = 0,1 \quad P(A = \overline{a}) = 0,9.$$

On cherche à déterminer $P(C = c|A = a)$. D'après la formule de Bayes :

$$P(C = c|A = a) = \frac{P(A = a|C = c)P(C = c)}{P(A = a)} = \frac{0,8 \times 0,05}{0,1} = 0,4.$$

Q B.2 Monsieur Y, le voisin de monsieur X, observe souvent la rue pour passer le temps et, s'il voit un cambrioleur chez X, il s'empresse de lui téléphoner. Les cambrioleurs peuvent être très discrets, aussi n'y a-t-il que 60% de chances que Y voit ceux-ci lorsqu'il y a cambriolage chez X. De temps à autre, Y croit voir des cambrioleurs alors qu'il n'y en a pas. Cela arrive environ 20% du temps. Enfin, Y étant sourd, il ne peut entendre l'alarme de monsieur X lorsque celle-ci se déclenche, ce qui implique que, conditionnellement au fait qu'il y ait cambriolage chez X ou non, il y a indépendance entre le déclenchement de l'alarme et les coups de téléphone de Y. Juste après avoir entendu son alarme se déclencher, monsieur X reçoit un coup de téléphone de son voisin le prévenant qu'il croit voir un cambrioleur. Quelle est, dans ces conditions, la probabilité qu'il y en ait effectivement un ? Vous écrirez d'abord la formule de cette probabilité avant d'en donner une valeur numérique.

D'après l'énoncé, si l'on appelle $T \in \{t, \overline{t}\}$ la variable « coup de téléphone du voisin », on a les probabilités suivantes :

$$P(T=t|C=c) = 0,6 \quad P(T=\overline{t}|C=c) = 0,4 \quad P(T=t|C=\overline{c}) = 0,2 \quad P(T=\overline{t}|C=\overline{c}) =$$

$$P(A,T|C) = P(A|C)P(T|C).$$

On cherche à déterminer $P(C=c|A=a,T=t)$. Or, d'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
P(C=c|A=a,T=t) &= \frac{P(A=a,T=t|C=c)P(C=c)}{P(A=a,T=t)} \\
&= \frac{P(A=a|C=c)P(T=t|C=c)P(C=c)}{P(A=a,T=t,C=c)+P(A=a,T=t,C=\overline{c})} \\
&= \frac{P(A=a|C=c)P(T=t|C=c)P(C=c)}{P(A=a|C=c)P(T=t|C=c)P(C=c)+P(A=a|C=\overline{c})P(T} \\
&= \frac{0,8 \times 0,6 \times 0,05}{0,8 \times 0,6 \times 0,05 + 0,1 \times 0,2 \times 0,95} \approx 0;558.
\end{aligned}$$