

## Examen de 2ème session du module RFIDE

*Christophe Gonzales*

Durée : 2 heures

*Seuls documents autorisés :*

*Les transparents de cours. Calculatrices autorisées.*

### Exercice A (5 points)

On a observé le nombre d'occurrences de pannes d'appareils électroniques au cours des 3 dernières années :

2	7	3	4	1	3	5	5	3	7
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

**Q A.1** On suppose que la distribution du nombre d'occurrences des pannes suit une loi de Poisson. Rappel : si une variable aléatoire  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , alors  $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ . En utilisant l'échantillon ci-dessus, estimez par maximum de vraisemblance la valeur de  $\lambda$ .

La vraisemblance est égale à  $L(\mathbf{x}, \lambda) = \pi(\mathbf{x}|\lambda) = \prod_{i=1}^{10} P(x_i|\lambda) = \prod_{i=1}^{10} [\lambda^{x_i} e^{-\lambda} / x_i!]$ . Par conséquent, la log-vraisemblance est égale à  $\ln L(\mathbf{x}, \theta) = \sum_{i=1}^{10} (x_i \ln \lambda - \lambda - \ln(x_i!)) = (\sum_{i=1}^{10} x_i) \ln \lambda - 10\lambda - \sum_{i=1}^{10} \ln(x_i!)$ . Donc :

$$\frac{\partial \ln L(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{\lambda} - 10 = 0 \implies \lambda_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10}.$$

D'après le tableau ci-dessus,  $\sum_{i=1}^{10} x_i = 40$ . Donc  $\lambda_{MV} = 4$ .

**Q A.2** On a maintenant un *a priori* sous la forme d'une loi Gamma de densité  $g(x) = \frac{10^{11}}{\Gamma(11)} x^{10} e^{-10x}$ . Estimez par maximum a posteriori la valeur de  $\lambda$ .

Le maximum a posteriori est défini par :

$$\lambda_{MAP} = \text{Argmax}_{\lambda} \pi(\mathbf{x}|\lambda) \pi(\lambda) = \text{Argmax}_{\lambda} \left( \prod_{i=1}^{10} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} \right) \frac{10^{11}}{\Gamma(11)} x^{10} e^{-10x}.$$

En passant au log, on doit donc optimiser  $\sum_{i=1}^{10} (\sum_{i=1}^{10} x_i \ln \lambda - \lambda - \ln(x_i!)) + \ln \frac{10^{11}}{\Gamma(11)} + 10 \ln \lambda - 10\lambda$ . En dérivant par rapport à  $\lambda$ , et en fixant cette dérivée à 0, on obtient :

$$\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{\lambda} - 10 + \frac{10}{\lambda} - 10 = 0.$$

Autrement dit, on doit résoudre  $\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i + 10}{\lambda} - 10 = 0$ . Donc  $\lambda_{MAP} = (\sum_{i=1}^{10} x_i + 10) / 20 = 50 / 20 = 2,5$ .

**Exercice B (5 points)**

Le propriétaire  $X$  d'une maison possède une alarme (détecteur de bruit) afin de protéger celle-ci. D'après son constructeur, lorsqu'il y a cambriolage, il y a 80% de chances pour que l'alarme se déclenche et il y a 10% de chances qu'elle le fasse lorsqu'il n'y a pas cambriolage. Par ailleurs, d'après la préfecture de police, dans ce quartier, une maison a statistiquement 5% de chances d'être cambriolée. Enfin, des mesures sonores prises par la mairie ont montré qu'à tout moment de la journée, il y a 10% de chances pour qu'on entende une alarme dans ce quartier.

**Q B.1** Monsieur  $X$  est proche de chez lui et entend son alarme se déclencher. Il se demande alors quelle est, dans ces conditions, la probabilité qu'il y ait effectivement un cambrioleur chez lui. Écrivez la formule correspondant à cette probabilité, puis calculez sa valeur.

Retranscrivons l'énoncé en termes de probabilités. Appelons  $C \in \{c, \bar{c}\}$  la variable « cambriolage »,  $A \in \{a, \bar{a}\}$  la variable « alarme ». Alors :

$$P(A = a|C = c) = 0,8 \quad P(A = \bar{a}|C = c) = 0,2 \quad P(A = a|C = \bar{c}) = 0,1 \quad P(A = \bar{a}|C = \bar{c}) = 0,9 \\ P(C = c) = 0,05 \quad P(C = \bar{c}) = 0,95 \quad P(A = a) = 0,1 \quad P(A = \bar{a}) = 0,9.$$

On cherche à déterminer  $P(C = c|A = a)$ . D'après la formule de Bayes :

$$P(C = c|A = a) = \frac{P(A = a|C = c)P(C = c)}{P(A = a)} = \frac{0,8 \times 0,05}{0,1} = 0,4.$$

**Q B.2** Monsieur  $Y$ , le voisin de monsieur  $X$ , observe souvent la rue pour passer le temps et, s'il voit un cambrioleur chez  $X$ , il s'empresse de lui téléphoner. Les cambrioleurs peuvent être très discrets, aussi n'y a-t-il que 60% de chances que  $Y$  voit ceux-ci lorsqu'il y a cambriolage chez  $X$ . De temps à autre,  $Y$  croit voir des cambrioleurs alors qu'il n'y en a pas. Cela arrive environ 20% du temps. Enfin,  $Y$  étant sourd, il ne peut entendre l'alarme de monsieur  $X$  lorsque celle-ci se déclenche, ce qui implique que, conditionnellement au fait qu'il y ait cambriolage chez  $X$  ou non, il y a indépendance entre le déclenchement de l'alarme et les coups de téléphone de  $Y$ . Juste après avoir entendu son alarme se déclencher, monsieur  $X$  reçoit un coup de téléphone de son voisin le prévenant qu'il croit voir un cambrioleur. Quelle est, dans ces conditions, la probabilité qu'il y en ait effectivement un ? Vous écrivez d'abord la formule de cette probabilité avant d'en donner une valeur numérique.

D'après l'énoncé, si l'on appelle  $T \in \{t, \bar{t}\}$  la variable « coup de téléphone du voisin », on a les probabilités suivantes :

$$P(T = t|C = c) = 0,6 \quad P(T = \bar{t}|C = c) = 0,4 \quad P(T = t|C = \bar{c}) = 0,2 \quad P(T = \bar{t}|C = \bar{c}) = 0,8 \\ P(A, T|C) = P(A|C)P(T|C).$$

On cherche à déterminer  $P(C = c|A = a, T = t)$ . Or, d'après la formule de Bayes :

$$P(C = c|A = a, T = t) = \frac{P(A = a, T = t|C = c)P(C = c)}{P(A = a, T = t)} \\ = \frac{P(A = a|C = c)P(T = t|C = c)P(C = c)}{P(A = a, T = t, C = c) + P(A = a, T = t, C = \bar{c})} \\ = \frac{P(A = a|C = c)P(T = t|C = c)P(C = c)}{P(A = a|C = c)P(T = t|C = c)P(C = c) + P(A = a|C = \bar{c})P(T = t|C = \bar{c})P(C = \bar{c})} \\ = \frac{0,8 \times 0,6 \times 0,05}{0,8 \times 0,6 \times 0,05 + 0,1 \times 0,2 \times 0,95} \approx 0,558.$$