Examen de 2ème session du module RFIDEC

Christophe Gonzales

Durée : 2 heures

Seuls documents autorisés :
Seuls documents autorisés: les transparents de cours. Calculatrices autorisées.

Exercice 2 (4 points)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(K, \theta)$, où K est une constante supposée connue. On observe un échantillon $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de taille n d'instanciations de cette variable aléatoire.

Q 2.1 Calculez la valeur de θ par maximum de vraisemblance. Bien entendu, vous démontrerez mathématiquement votre résultat.

Q 2.2 Des études statistiques nous indiquent que θ suit une loi Beta *a priori* $\pi(\theta) = \text{Beta}(\theta, a, b)$ Quelle est la valeur a posteriori de θ ? Justifiez mathématiquement votre réponse.

Exercice 3 (3 points)

On répartit les notes des examens de RFIDEC en trois catégories : $c_1 =$ « note < 8 »,

$c_2 =$ « note ≥ 8 mais < 12 » et $c_3 =$ « note ≥ 12 ». Soit X une variable aléatoire représentant la note d'un étudiant à l'examen de 1ère session, et soit Y sa note en 2ème session. On se demande si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes. Pour cela, on a extrait les notes aux 2 examens pour 100 étudiants des promos précédentes et on a obtenu le tableau suivant, qui recense, dans chaque case, le nombre d'étudiants appartenant à la catégorie c_i pour X et c_j pour Y.

$X \backslash Y$	c_1	c_2	c_3
c_1	2	13	6
c_2	11	27	13
c_3	3	17	8

Dressez un test d'indépendance de niveau de confiance 90%. Peut-on, selon ce test, en déduire que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes ?

On commence par dresser le tableau contenant les marginales :

$X \backslash Y$	c_1	c_2	c_3	total
c_1	2	13	6	21
c_2	11	27	13	51
c_3	3	17	8	28
total	16	57	27	

De là, on en déduit le tableau obtenu si les 2 variables étaient indépendantes :

$X \backslash Y$	c_1	c_2	c_3
c_1	3.36	11.97	5.67
c_2	8.16	29.07	13.77
c_3	4.48	15.96	7.56

On peut donc calculer la valeur d^2 de la statistique d'ajustement : $d^2 = 2,42$. Or D^2 doit suivre une loi du χ^2_4. D'après cette loi, le seuil d^2_α à partir duquel on doit considérer X et Y comme dépendants est 7,78. Puisque d^2 est inférieur, on en déduit que X et Y sont bien indépendants.

Exercice 4 (3 points)

Dans cet exercice, on cherche à savoir quelle est la pointure moyenne d'une population d'étudiants. Pour cela, une étude préalable a montré que l'écart-type sur les pointures de la population était de 3. On a par ailleurs extrait l'échantillon de pointures suivant :

41	39	43	42	42	45	43	41	40

Donnez une estimation de la moyenne μ par intervalle de confiance de niveau de confiance 95%.