Examen de 2ème session du module RFIDEC

Massih-Reza Amini / Christophe Gonzales

Durée : 2 heures

Exercice 1 (5 points)

Le propriétaire X d'une maison possède une alarme (détecteur de bruit) afin de protéger celle-ci. D'après son constructeur, lorsqu'il y a cambriolage, il y a 80% de chances pour que l'alarme se déclenche et il y a 10% de chances qu'elle le fasse lorsqu'il n'y a pas cambriolage. Par ailleurs, d'après la préfecture de police, dans ce quartier, une maison a statistiquement 5% de chances d'être cambriolée. Enfin, des mesures sonores prises par la mairie ont montré qu'à tout moment de la journée, il y a 10% de chances pour qu'on entende une alarme dans ce quartier.

Q 1.1 Monsieur X est proche de chez lui et entend son alarme se déclencher. Il se demande alors quelle est, dans ces conditions, la probabilité qu'il y ait effectivement un cambrioleur chez lui. Écrivez la formule correspondant à cette probabilité, puis calculez sa valeur.

Retranscrivons l'énoncé en termes de probabilités. Appelons $C \in \{c, \overline{c}\}$ la variable « cambriolage », $A \in \{a, \overline{a}\}$ la variable « alarme ». Alors :

$$P(A = a|C = c) = 0,8 \quad P(A = \overline{a}|C = c) = 0,2 \quad P(A = a|C = \overline{c}) = 0,1 \quad P(A = \overline{a}|C = \overline{c}) = 0,9$$
$$P(C = c) = 0,05 \quad P(C = \overline{c}) = 0,95 \quad P(A = a) = 0,1 \quad P(A = \overline{a}) = 0,9.$$

On cherche à déterminer $P(C = c|A = a)$. D'après la formule de Bayes :

$$P(C = c|A = a) = \frac{P(A = a|C = c)P(C = c)}{P(A = a)} = \frac{0,8 \times 0,05}{0,1} = 0,4.$$

Q 1.2 Monsieur Y, le voisin de monsieur X, observe souvent la rue pour passer le temps et, s'il voit un cambrioleur chez X, il s'empresse de lui téléphoner. Les cambrioleurs peuvent être très discrets, aussi n'y a-t-il que 60% de chances que Y voit ceux-ci lorsqu'il y a cambriolage chez X. De temps à autre, Y croit voir des cambrioleurs alors qu'il n'y en a pas. Cela arrive environ 20% du temps. Enfin, Y étant sourd, il ne peut entendre l'alarme de monsieur X lorsque celle-ci se déclenche, ce qui implique que, conditionnellement au fait qu'il y ait cambriolage chez X ou non, il y a indépendance entre le déclenchement de l'alarme et les coups de téléphone de Y. Juste après avoir entendu son alarme se déclencher, monsieur X reçoit un coup de téléphone de son voisin le prévenant qu'il croit voir un cambrioleur. Quelle est, dans ces conditions, la probabilité qu'il y en ait effectivement un ? Vous écrirez d'abord la formule de cette probabilité avant d'en donner une valeur numérique.

D'après l'énoncé, si l'on appelle $T \in \{t, \overline{t}\}$ la variable « coup de téléphone du voisin », on a les probabilités suivantes :

$$P(T = t|C = c) = 0,6 \quad P(T = \overline{t}|C = c) = 0,4 \quad P(T = t|C = \overline{c}) = 0,2 \quad P(T = \overline{t}|C = \overline{c}) = 0,8$$
$$P(A, T|C) = P(A|C)P(T|C).$$

On cherche à déterminer $P(C=c|A=a,T=t)$. Or, d'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
P(C=c|A=a,T=t) &= \frac{P(A=a,T=t|C=c)P(C=c)}{P(A=a,T=t)} \\
&= \frac{P(A=a|C=c)P(T=t|C=c)P(C=c)}{P(A=a,T=t,C=c)+P(A=a,T=t,C=\overline{c})} \\
&= \frac{P(A=a|C=c)P(T=t|C=c)P(C=c)}{P(A=a|C=c)P(T=t|C=c)P(C=c)+P(A=a|C=\overline{c})P(T=t|C=\overline{c})P(C=\overline{c})} \\
&= \frac{0,8\times 0,6\times 0,05}{0,8\times 0,6\times 0,05+0,1\times 0,2\times 0,95} \approx 0;558.
\end{aligned}$$

Exercice 2 (5 points)

Un pilote de ligne assure régulièrement le trajet Paris-Montpellier. Il s'est amusé à calculer le temps qu'il passe entre le moment où il part de chez lui (à Paris, huit heures du matin) et le moment où il arrive à l'aéroport de Montpellier. Voici le résultat de ses observations : le temps passé dans le RER pour aller jusqu'à Orly suit une loi normale N(35 min, 8 min^2) ; le temps pour préparer le vol/inspecter l'appareil suit une loi N(1 heure, 16 min^2) ; enfin, le temps de vol suit une loi N(1 heure 10 min, 25 min^2). Le pilote a décidé de donner rendez-vous à l'aéroport de Montpellier à un de ses collègues. Il ne voudrait pas le fixer trop tôt pour ne pas être en retard, ni le fixer trop tard car cela l'obligerait à attendre. Pour l'aider à choisir l'heure du rendez-vous, calculez la probabilité que le pilote arrive :
1/ entre 10h31 et 10h52.
2/ après 11h.
3/ avant 10h40.
Vous détaillerez les calculs avant de les instancier numériquement.
Indication : lorsque des variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ suivant des lois normales sont indépendantes, leur somme est une variable aléatoire d'espérance la somme des espérances des X_i et de variance la somme des variances des X_i.

Soit $T1$, T_2, T_3 les variables « temps passé dans le RER », « temps pour préparer le vol » et « temps de vol ». On sait d'après l'énoncé que :

$$T_1 \sim N(35 \text{ min}, 8 \text{ min}^2) \qquad T_2 \sim N(60 \text{ min}, 16 \text{ min}^2) \qquad T_3 \sim N(70 \text{ min}, 25 \text{ min}^2).$$

Par conséquent, la variable X = « temps total pour arriver à Montpellier » vérifie les relations suivantes :

$$X = T_1+T_2+T_3 \qquad X \sim N((35+60+70) \text{ min}, (8+16+25) \text{ min}^2) = N(165 \text{ min}, 49 \text{ min}^2).$$

Par la suite, tous les calculs seront exprimés en minutes et minutes^2.

$$\begin{aligned}
1/\ P(10\text{h}30 \leq \text{arrivée à Montpellier} \leq 10\text{h}52) &= P(150 \leq X \leq 172) \\
&= P\left(\frac{150-165}{\sqrt{49}} \leq \frac{X-165}{\sqrt{49}} \leq \frac{172-165}{\sqrt{49}}\right) \\
&= P\left(-2,143 \leq \frac{X-165}{\sqrt{49}} \leq 1\right) \\
&= 1-0,0161-0,1587 = 0,8252.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2/\ P(\text{arrivée à Montpellier} \geq 11\text{h}) &= P(X \geq 180) \\
&= P\left(\frac{X-165}{\sqrt{49}} \geq \frac{180-165}{\sqrt{49}}\right) \\
&= P\left(\frac{X-165}{\sqrt{49}} \geq 2,143\right) \\
&= 0,0161.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
3/\ P(\text{arrivée à Montpellier} \leq 10\text{h}40) &= P(X \leq 160)\\
&= P\left(\frac{X-165}{\sqrt{49}} \leq \frac{160-165}{\sqrt{49}}\right)\\
&= P\left(\frac{X-165}{\sqrt{49}} \leq -0,714\right)\\
&= P\left(\frac{X-165}{\sqrt{49}} \geq 0,714\right) = 0,237.
\end{aligned}
$$

Exercice 3 (2 points)

Prouvez que si A et B sont deux événements indépendants alors A^C et B^C, leurs complémentaires, sont aussi indépendants.

A et B indépendants $\Longrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Or $P(A) = 1 - P(A^C)$.
Donc $P(A \cap B) = [1 - P(A^C)]P(B)$ et donc :
$P(A^C)P(B) = P(B) - P(A \cap B) = P(A^C \cap B) + P(A \cap B) - P(A \cap B) = P(A^C \cap B)$.
Par ailleurs, $P(B) = 1 - P(B^C)$, donc $P(A^C \cap B) = P(A^C)[1 - P(B^C)]$ et, par conséquent :
$P(A^C)P(B^C) = P(A^C) - P(A^C \cap B) = P(A^C \cap B^C)$,
d'où A^C et B^C indépendants.