

Premier examen réparti du module RFIDEC

C. Gonzales

Durée : 2 heures

Seuls documents autorisés :

Les transparents de cours. Calculatrices autorisées.

Exercice 1 (7 pts)

Un péage d'autoroute est constitué de 10 cabines de péage, numérotées de 1 à 10. On a recensé le nombre de clients se présentant à chaque cabine sur une heure donnée de la journée. Voici les effectifs obtenus :

N° cabine	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nb clients	24	14	18	20	23	13	23	24	23	18

Q 1.1 À l'aide d'un test d'ajustement, testez si la distribution des clients dans les différentes cabines du péage est uniforme. Utilisez pour cela un niveau de test $\alpha = 0,05$ (niveau de confiance du test = 95%).

Exercice 2 (6 pts)

Soit trois variables aléatoires X , Y , Z , de modalités respectives $\{x_1, x_2\}$, $\{y_1, y_2, y_3\}$ et $\{z_1, z_2\}$. La probabilité jointe de ces trois variables est la suivante :

	x_1			x_2		
	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3
z_1	0,02	0,16	0,03	0,1	0,12	0,02
z_2	0,18	0,04	0,07	0,1	0,08	0,08

Q 2.1 Déterminez si X est indépendante de Y , si X est indépendante de Z et si Y est indépendante de Z . Vous justifierez bien évidemment vos réponses.

Q 2.2 En déduire un réseau bayésien représentant les indépendances que vous avez déterminées.

Exercice 3 (7 pts)

Dans le cadre des « Plans de prévention des risques d'inondations (PPR-I) », des photos du satellite SPOT5 sont utilisées afin de caractériser des zones susceptibles d'être inondées. Dans le passé, pour une région donnée, il a été déterminé que 60% des parcelles étaient inondables (PI), 10% étaient partiellement inondables (PPI), les autres étant non inondables (NI).

D'après les caractéristiques techniques de SPOT5, les probabilités d'obtenir un certain niveau de gris n sur une image conditionnellement au fait que la zone représentée est de

type PI ou PPI sont respectivement $P(n|PI)$ et $P(n|PPI)$. Des études ont montré que $P(n|PI) = \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $P(n|PPI) = \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ sont des lois normales de caractéristiques respectives :

$$\mu_1 = 100 \quad \sigma_1 = 20 \quad \mu_2 = 85 \quad \sigma_2 = 5.$$

Q 3.1 Calculez les valeurs des fonctions de densité $p(n|PI)$ et $p(n|PPI)$ pour $n = 80$.

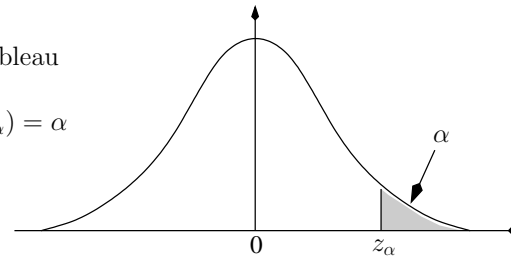
Q 3.2 Une nouvelle image envoyée par SPOT5 révèle pour la région mentionnée ci-dessus une zone Z dont le niveau de gris est $n = 80$. Calculez la vraisemblance d'obtenir la zone Z sous l'hypothèse $\theta_1 = \ll Z \text{ est de type } PI \gg$, puis sous l'hypothèse $\theta_2 = \ll Z \text{ est de type } PPI \gg$. Si l'on prend une décision fondée sur le critère du maximum de vraisemblance, quelle classe $\theta_1 = PI$ ou $\theta_2 = PPI$ serait la plus probable pour la zone Z ?

Q 3.3 Si l'on prend une décision fondée selon le critère du maximum *a posteriori* (MAP), à quelle classe $\theta_1 = PI$ ou $\theta_2 = PPI$ doit-on attribuer la zone ?

Q 3.4 En fait, on n'est pas très sûr de la probabilité *a priori* des zones partiellement inondables (PPI) qui, selon les années, varie de 8% à 20% de la région. Est-ce que cela peut changer notre décision selon le critère MAP ?

Table de la loi normale

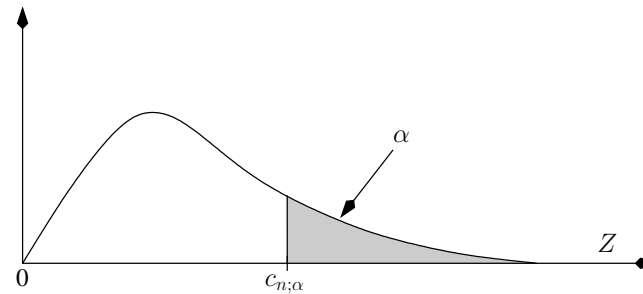
valeurs dans le tableau
ci-dessous : les α
tels que $P(Z > z_\alpha) = \alpha$



z_α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0859	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0722	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0466	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0352	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143

Table de la loi du χ^2

valeurs dans le tableau
ci-dessous : les $c_{n;\alpha}$
tels que $P(Z > c_{n;\alpha}) = \alpha$



$n \setminus \alpha$	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0
1	0,0000393	0,000157	0,000982	0,00393	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21	1
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,3	1
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	7,78	9,49	11,1	13,3	1
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,1	12,8	15,1	1
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	10,6	12,6	14,4	16,8	1
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,0	14,1	16,0	18,5	2
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,4	15,5	17,5	20,1	2
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,7	16,9	19,0	21,7	2
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	16,0	18,3	20,5	23,2	2
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,3	19,7	21,9	24,7	2
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,5	21,0	23,3	26,2	2
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,8	22,4	24,7	27,7	2
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,1	23,7	26,1	29,1	3
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,3	25,0	27,5	30,6	3
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,5	26,3	28,8	32,0	3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	24,8	27,6	30,2	33,4	3
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	26,0	28,9	31,5	34,8	3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	27,2	30,1	32,9	36,2	3
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	28,4	31,4	34,2	37,6	4
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	29,6	32,7	35,5	38,9	4
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	30,8	33,9	36,8	40,3	4