

# Premier examen réparti du module RFIDEC

*C. Gonzales*  
Durée : 2 heures

*Seuls documents autorisés :  
Les transparents de cours. Calculatrices autorisées.*

## Exercice 1 (7 pts)

Un péage d'autoroute est constitué de 10 cabines de péage, numérotées de 1 à 10. On a recensé le nombre de clients se présentant à chaque cabine sur une heure donnée de la journée. Voici les effectifs obtenus :

N° cabine	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nb clients	24	14	18	20	23	13	23	24	23	18

**Q 1.1** À l'aide d'un test d'ajustement, testez si la distribution des clients dans les différentes cabines du péage est uniforme. Utilisez pour cela un niveau de test  $\alpha = 0,05$  (niveau de confiance du test = 95%).

## Exercice 2 (6 pts)

Soit trois variables aléatoires  $X, Y, Z$ , de modalités respectives  $\{x_1, x_2\}$ ,  $\{y_1, y_2, y_3\}$  et  $\{z_1, z_2\}$ . La probabilité jointe de ces trois variables est la suivante :

		$x_1$			$x_2$		
		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$z_1$		0,02	0,16	0,03	0,1	0,12	0,02
$z_2$		0,18	0,04	0,07	0,1	0,08	0,08

**Q 2.1** Déterminez si  $X$  est indépendante de  $Y$ , si  $X$  est indépendante de  $Z$  et si  $Y$  est indépendante de  $Z$ . Vous justifierez bien évidemment vos réponses.

**Q 2.2** En déduire un réseau bayésien représentant les indépendances que vous avez déterminées.

## Exercice 3 (7 pts)

Dans le cadre des « Plans de prévention des risques d'inondations (PPR-I) », des photos du satellite SPOT5 sont utilisées afin de caractériser des zones susceptibles d'être inondées. Dans le passé, pour une région donnée, il a été déterminé que 60% des parcelles étaient inondables ( $PI$ ), 10% étaient partiellement inondables ( $PPI$ ), les autres étant non inondables ( $NI$ ).

D'après les caractéristiques techniques de SPOT5, les probabilités d'obtenir un certain niveau de gris  $n$  sur une image conditionnellement au fait que la zone représentée est de type  $PI$  ou  $PPI$  sont respectivement  $P(n|PI)$  et  $P(n|PPI)$ . Des études ont montré que  $P(n|PI) = \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$  et  $P(n|PPI) = \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$  sont des lois normales de caractéristiques respectives :

$$\mu_1 = 100 \quad \sigma_1 = 20 \quad \mu_2 = 85 \quad \sigma_2 = 5.$$

**Q 3.1** Calculez les valeurs des fonctions de densité  $p(n|PI)$  et  $p(n|PPI)$  pour  $n = 80$ .

**Q 3.2** Une nouvelle image envoyée par SPOT5 révèle pour la région mentionnée ci-dessus une zone  $Z$  dont le niveau de gris est  $n = 80$ . Calculez la vraisemblance d'obtenir la zone  $Z$  sous l'hypothèse  $\theta_1 = \ll Z \text{ est de type } PI \gg$ , puis sous l'hypothèse  $\theta_2 = \ll Z \text{ est de type } PPI \gg$ . Si l'on prend une décision fondée sur le critère du maximum de vraisemblance, quelle classe  $\theta_1 = PI$  ou  $\theta_2 = PPI$  serait la plus probable pour la zone  $Z$  ?

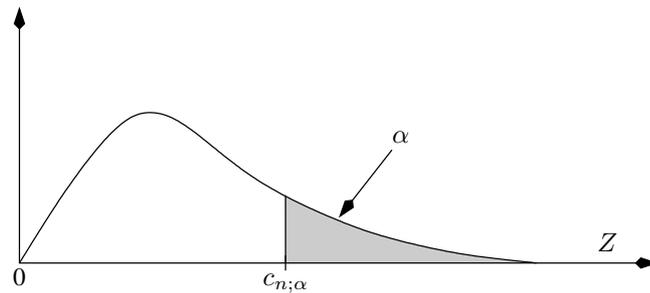
**Q 3.3** Si l'on prend une décision fondée selon le critère du maximum *a posteriori* (MAP), à quelle classe  $\theta_1 = PI$  ou  $\theta_2 = PPI$  doit-on attribuer la zone ?

**Q 3.4** En fait, on n'est pas très sûr de la probabilité *a priori* des zones partiellement inondables (PPI) qui, selon les années, varie de 8% à 20% de la région. Est-ce que cela peut changer notre décision selon le critère MAP ?



### Table de la loi du $\chi^2$

valeurs dans le tableau  
 ci-dessous : les  $c_{n;\alpha}$   
 tels que  $P(Z > c_{n;\alpha}) = \alpha$



$n \setminus \alpha$	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,0000393	0,000157	0,000982	0,00393	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7