Partiel du module RFIDEC

C. Gonzales

Durée : 2 heures

Seuls documents autorisés :
Seuls documents autorisés: les transparents de cours. Calculatrices autorisées.

Exercice 1 (2 pts)

Soit un échantillon de taille 10 :

5	1	9	2	4	2	8	7	3	9

.

Q 1.1 Déterminez la médiane de cet échantillon.

Q 1.2 Estimez, sans biais, la variance de la population d'où est issu l'échantillon.

Exercice 2 (4 pts)

Soit une urne contenant des boules de 5 couleurs différentes : (R)ouges, (B)leues, (V)ertes, (J)aunes, (N)oires. On suspecte que la distribution de probabilité sur les couleurs des boules de l'urne est la suivante :

$$P(R) = 0,2 \quad P(B) = 0,4 \quad P(V) = 0,1 \quad P(J) = 0,2 \quad P(N) = 0,1.$$

Par ailleurs, on a tiré un échantillon i.i.d. de 20 boules et on a noté le nombre de boules de chaque couleur :

Couleur	R	B	V	J	N
Nb boules	2	9	4	5	0

Faites un test d'ajustement avec un niveau de confiance $1 - \alpha = 90\%$ pour déterminer si, oui ou non, la distribution de probabilité sur les couleurs des boules est celle indiquée ci-dessus.

Exercice 3 (8 points)

On sait, par expérience, que les notes de partiel de RFIDEC suivent une loi normale $\mathcal{N}(\mu; 6^2)$. On considère l'échantillon de notes i.i.d. suivant :

10	8	13	20	12	14	9	7	15

.

Q 3.1 Estimez la moyenne de la population des notes de partiel de RFIDEC grâce à un intervalle de confiance de niveau de confiance $1 - \alpha = 95\%$.

Q 3.2 Par expérience, les années précédentes, la moyenne au partiel de RFIDEC était égale à 14. Dressez un test d'hypothèse de niveau de confiance $1-\alpha = 95\%$ pour confronter les hypothèses $H_0 =$ « la moyenne est égale à 14 » et $H_1 =$ « la moyenne a baissé, i.e., elle est inférieure à 14 ».

Q 3.3 Calculez la puissance du test pour une moyenne de 12 (H_1 : la moyenne est égale à 12).

Exercice 4 (6 points)

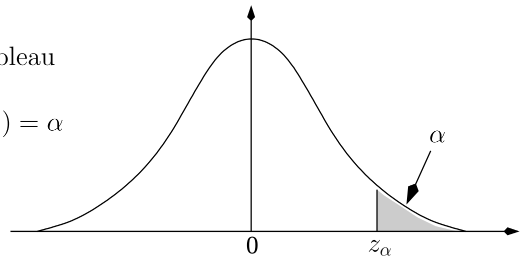
Soit X une variable aléatoire définie sur l'ensemble des nombres entiers positifs. X suit la loi géométrique de paramètre $p \in [0, 1]$ si $P(X = n) = (1 - p)^{n-1}p$. On a observé 5 réalisations (obtenues indépendamment les unes des autres) d'une variable X suivant la loi géométrique : $\boxed{4} \boxed{2} \boxed{6} \boxed{5} \boxed{8}$.

Q 4.1 Estimez par maximum de vraisemblance la valeur du paramètre $\theta = p$ de la loi.

Q 4.2 Avant le tirage de l'échantillon, nous avions une connaissance a priori sur le paramètre θ : ce dernier suivait a priori une loi Beta de paramètres 4 et 5, autrement dit $\pi(\theta) \propto \theta^3(1 - \theta)^4$. Estimez la valeur du paramètre $\theta = p$ par maximum a posteriori.

Table de la loi normale

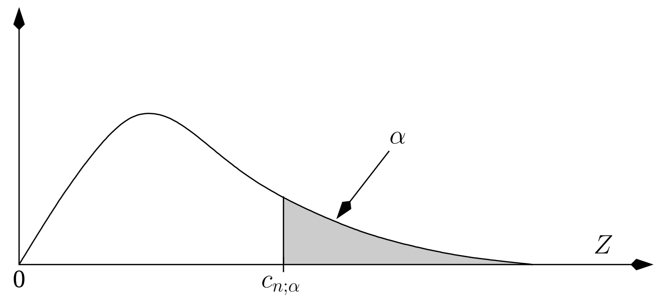
valeurs dans le tableau
ci-dessous : les α
tels que $P(Z > z_\alpha) = \alpha$



z_α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0859	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0722	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0466	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0352	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143

Table de la loi du χ^2

valeurs dans le tableau
ci-dessous : les $c_{n;\alpha}$
tels que $P(Z > c_{n;\alpha}) = \alpha$



$n \setminus \alpha$	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0
1	0,0000393	0,000157	0,000982	0,00393	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21	1
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,3	1
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	7,78	9,49	11,1	13,3	1
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,1	12,8	15,1	1
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	10,6	12,6	14,4	16,8	1
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,0	14,1	16,0	18,5	2
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,4	15,5	17,5	20,1	2
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,7	16,9	19,0	21,7	2
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	16,0	18,3	20,5	23,2	2
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,3	19,7	21,9	24,7	2
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,5	21,0	23,3	26,2	2
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,8	22,4	24,7	27,7	2
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,1	23,7	26,1	29,1	3
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,3	25,0	27,5	30,6	3
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,5	26,3	28,8	32,0	3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	24,8	27,6	30,2	33,4	3
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	26,0	28,9	31,5	34,8	3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	27,2	30,1	32,9	36,2	3
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	28,4	31,4	34,2	37,6	4