

Partiel du module RFIDEC

C. Gonzales

Durée : 2 heures

Seuls documents autorisés :

Seuls documents autorisés: les transparents de cours. Calculatrices autorisées.

Exercice 1 (2 pts)

Soit un échantillon de taille 10 :

5	1	9	2	4	2	8	7	3	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

 .

Q 1.1 Déterminez la médiane de cet échantillon.

Q 1.2 Estimez, sans biais, la variance de la population d'où est issu l'échantillon.

Exercice 2 (4 pts)

Soit une urne contenant des boules de 5 couleurs différentes : (R)ouges, (B)leues, (V)ertes, (J)aunes, (N)oirs. On suspecte que la distribution de probabilité sur les couleurs des boules de l'urne est la suivante :

$$P(R) = 0,2 \quad P(B) = 0,4 \quad P(V) = 0,1 \quad P(J) = 0,2 \quad P(N) = 0,1.$$

Par ailleurs, on a tiré un échantillon i.i.d. de 20 boules et on a noté le nombre de boules de chaque couleur :

Couleur	R	B	V	J	N
Nb boules	2	9	4	5	0

Faites un test d'ajustement avec un niveau de confiance $1 - \alpha = 90\%$ pour déterminer si, oui ou non, la distribution de probabilité sur les couleurs des boules est celle indiquée ci-dessus.

Exercice 3 (8 points)

On sait, par expérience, que les notes de partiel de RFIDEC suivent une loi normale $\mathcal{N}(\mu; 6^2)$. On considère l'échantillon de notes i.i.d. suivant :

10	8	13	20	12	14	9	7	15
----	---	----	----	----	----	---	---	----

 .

Q 3.1 Estimez la moyenne de la population des notes de partiel de RFIDEC grâce à un intervalle de confiance de niveau de confiance $1 - \alpha = 95\%$.

Q 3.2 Par expérience, les années précédentes, la moyenne au partiel de RFIDEC était égale à 14. Dressez un test d'hypothèse de niveau de confiance $1 - \alpha = 95\%$ pour confronter les hypothèses $H_0 =$ « la moyenne est égale à 14 » et $H_1 =$ « la moyenne a baissé, i.e., elle est inférieure à 14 ».

Q 3.3 Calculez la puissance du test pour une moyenne de 12 (H_1 : la moyenne est égale à 12).

Exercice 4 (6 points)

Soit X une variable aléatoire définie sur l'ensemble des nombres entiers positifs. X suit la loi géométrique de paramètre $p \in [0, 1]$ si $P(X = n) = (1-p)^{n-1}p$. On a observé 5 réalisations (obtenues indépendamment les unes des autres) d'une variable X suivant la loi géométrique :

4	2	6	5	8
---	---	---	---	---

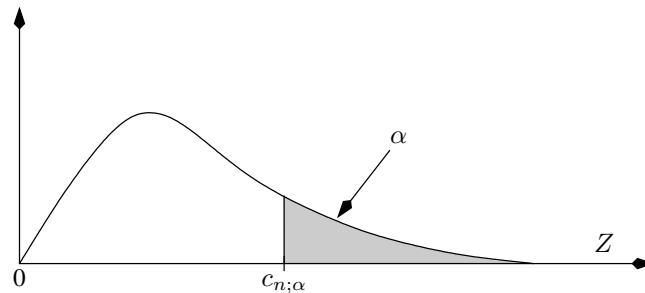
.

Q 4.1 Estimez par maximum de vraisemblance la valeur du paramètre $\theta = p$ de la loi.

Q 4.2 Avant le tirage de l'échantillon, nous avons une connaissance a priori sur le paramètre θ : ce dernier suivait a priori une loi Beta de paramètres 4 et 5, autrement dit $\pi(\theta) \propto \theta^3(1-\theta)^4$. Estimez la valeur du paramètre $\theta = p$ par maximum a posteriori.

Table de la loi du χ^2

valeurs dans le tableau
ci-dessous : les $c_{n;\alpha}$
tels que $P(Z > c_{n;\alpha}) = \alpha$



$n \setminus \alpha$	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,0000393	0,000157	0,000982	0,00393	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7