Partiel du module RFIDEC

C. Gonzales

Durée : 2 heures

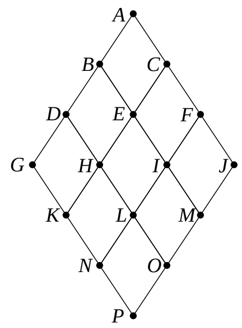
Seuls documents autorisés :
Tous documents autorisés, sauf la copie et les brouillons des voisins.
Calculatrices, ordinateurs et téléphones portables interdits.

Exercice 1 (6 pts)

Un robot doit se rendre du point A au point P en passant par les arêtes du graphe ci-dessous. Le robot est limité dans ses mouvements, aussi ne peut-il que descendre (par exemple, lorsqu'il est en E, il ne peut aller qu'en H ou en I, mais pas en B). Lorsqu'il est sur un nœud du graphe, il peut descendre soit sur l'arête de gauche, soit sur celle de droite. Son programme lui fait choisir 7 fois sur 10 l'arête de gauche et 3 fois sur 10 celle de droite.

Q 1.1 Calculez la probabilité que le robot passe en G pour aller vers P. Faites de même avec H, I, et enfin J.

Il est clair que le choix du robot d'aller à droite ou à gauche sur un embranchement ne dépend pas des embranchements précédents, les choix sont donc tous indépendants. De



plus, il y a toujours une probabilité de 7/10ème d'aller à gauche et de 3/10ème d'aller à droite. Par conséquent, les choix représentent des épreuves de Bernoulli et la variable aléatoire $X =$ « nombre de fois où l'on a pris à droite pour atteindre G, H, I ou J » suit une loi binômiale de paramètres 3 et 3/10.

Pour aller en G, il faut aller 3 fois à gauche. Donc $P(G) = P(X = 0) = \frac{3!}{3! \times 0!} \times \left(\frac{3}{10}\right)^0 \left(\frac{7}{10}\right)^3 = 0,343$. De même, $P(H) = P(X = 2) = 0,441$, $P(I) = P(X = 1) = 0,189$ et $P(J) = P(X = 0) = 0,027$.

On pouvait trouver ces probabilités différemment : il est évident que $P(B) = 0,7$ et $P(C) = 0,3$. Pour arriver en D, il faut partir de B, donc $P(D) = P(D, B) = P(D|B)P(B) = 0,7 \times 0,7 = 0,49$. De même, pour arriver en E, il faut soit venir de B, soit de C, et ces deux conditions sont en exclusion mutuelle. Par conséquent, $P(E) = P(E, B) + P(E, C) = P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C) = 0,3 \times 0,7 + 0,7 \times 0,3 = 0,42$. Enfin, $P(F) = P(F|C)P(C) = 0,3 \times 0,3 = 0,09$. On peut maintenant appliquer le même procédé sur la ligne contenant les nœuds G, H, I et J : $P(G) = P(G|D)P(D) = 0,7 \times 0,49 = 0,343$, $P(H) = P(H|D)P(D) + P(H|E)P(E) = 0,3 \times 0,49 + 0,7 \times 0,42 = 0,441$, $P(I) = P(I|E)P(E) + P(I|F)P(F) = 0,3 \times 0,42 + 0,7 \times 0,09 = 0,189$. Enfin, $P(J) = P(J|F)P(F) = 0,3 \times 0,09 = 0,027$.

Q 1.2 Soit X une variable aléatoire valant 0 si le robot est passé en G, 1 s'il est passé en H, 2 en I et 3 en J. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifiez votre réponse.

Comme nous l'avons vu précédemment, les déplacements en chaque nœud constituent une épreuve de Bernoulli. En remarquant que, pour aller en G, on ne se déplace qu'à gauche, que pour aller en H, on se déplace exactement une fois vers la droite, que pour aller en I, on se déplace exactement 2 fois vers le droite, et que pour aller en J, on se déplace 3 fois vers la droite, on peut déduire que la variable X correspond au nombre de succès des épreuves de Bernoulli pour arriver jusqu'en G, H, I ou J. Pour arriver sur ces nœuds, on a fait trois déplacements, autrement dit on a effectué trois épreuves de Bernoulli, dont on a vu qu'elles étaient indépendantes les unes des autres et avaient toutes la même probabilité de succès : 0,3. Par conséquent, $X \sim Bin(3, 0.3)$.

Exercice 2 (4 pts)

Soit trois variables aléatoires X, Y, Z, ayant respectivement pour domaines $\{x_1, x_2\}$,

$\{y_1, y_2\}$ et $\{z_1, z_2\}$. On a pu déterminer la probabilité jointe $P(X, Y, Z)$ de ces 3 variables :

	y_1		y_2	
	x_1	x_2	x_1	x_2
z_1	$0,060$	$0,140$	$0,060$	$0,140$
z_2	$0,192$	$0,048$	$0,288$	$0,072$

Montrez que X est indépendante de Y conditionnellement à Z.

X indépendant de Y conditionnellement à $Z \Longleftrightarrow P(X|Y, Z) = P(X|Z)$. Or, d'après la table ci-dessus, $P(Y = y_1, Z = z_1) = 0,06 + 0,14 = 0,2$, $P(Y = y_2, Z = z_1) = 0,06+0,14 = 0,2$, $P(Y = y_1, Z = z_2) = 0,192+0,048 = 0,24$ et $P(Y = y_2, Z = z_2) = 0,288+0,072 = 0,36$. Étant donné que $P(X|Y, Z) = P(X, Y, Z)/P(Y, Z)$, $P(X|Y, Z)$ est égal à :

	y_1		y_2	
	x_1	x_2	x_1	x_2
z_1	$0,060/0,2$	$0,140/0,2$	$0,060/0,2$	$0,140/0,2$
z_2	$0,192/0,24$	$0,048/0,24$	$0,288/0,36$	$0,072/0,36$

Autrement dit, $P(X|Y, Z)$ est égal à :

	y_1		y_2	
	x_1	x_2	x_1	x_2
z_1	$0,3$	$0,7$	$0,3$	$0,7$
z_2	$0,8$	$0,2$	$0,8$	$0,2$

On remarque que le sous-tableau correspondant à $Y = y_1$, autrement dit $P(X|Z, Y = y_1)$, est identique à celui correspondant à $Y = y_2$, i.e., $P(X|Z, Y = y_1) = P(X|Z, Y = y_2)$.
Or $P(X|Z) = P(X|Z, Y = y_1)P(Y = y_1|Z) + P(X|Z, Y = y_2)P(Y = y_2|Z) = P(X|Z, Y = y_1) \times [P(Y = y_1|Z) + P(Y = y_2|Z)] = P(X|Z, Y = y_1)$ car, quelle que soit la valeur z_i de Z, $P(Y = y_1|Z = z_i) + P(Y = y_2|Z = z_i) = 1$. Par conséquent, $P(X|Z) = P(X|Z, Y)$ et on a donc indépendance de X et de Y conditionnellement à Z.
On peut aussi faire la même déduction en observant que la connaissance de la valeur de Y (qui permet de savoir dans quelle colonne du tableau ci-dessus on se trouve) n'apporte aucune information sur X puisque les sous-tableaux à $Y = y_1$ et à $Y = y_2$ sont identiques. Par conséquent, X est bien indépendant de Y conditionnellement à Z.

Exercice 3 (5 pts)

Vous voulez investir à la bourse. Afin d'optimiser vos profits, vous relevez pendant 16 jours le cours du CAC40. Au début de ces deux semaines, celui-ci vaut 5715 points. Dans l'échantillon de 16 jours, le CAC40 vaut en moyenne 5726,025 points, avec un écart-type de 6 points. Vous ne voulez investir que si le CAC40 est à la hausse.

Q 3.1 Sachant que la variable X = « valeur du CAC40 » suit une loi normale de variance

36, effectuez un test d'hypothèse de niveau de confiance 99% pour savoir si le CAC40 a augmenté. Vous préciserez bien les hypothèses H_0 et H_1.

Ici, on s'intéresse au fait que le CAC40 puisse augmenter, par conséquent, $H_0 =$ « $\mu = 5715$ » et $H_1 =$ « $\mu > 5715$ ». Un test d'hypothèse que niveau de confiance 99% signifie que α, la probabilité de rejeter H_0 sachant que H_0 est vraie, est égal à 0,01. Autrement dit :

$$\begin{aligned}
0,01 &= P(\text{rejeter } H_0 | H_0 \text{ est vraie}) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > c \,\middle|\, \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ et } \mu = 5715\right) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > 2,35 \,\middle|\, \mu = 5715\right) \\
&= P\left(\overline{X} > \mu + 2,35\sigma/\sqrt{n} \mid \mu = 5715\right) \\
&= P\left(\overline{X} > 5715 + 2,35 \times 6/4\right) = P\left(\overline{X} > 5718,525\right).
\end{aligned}$$

La règle du test est donc : si $\overline{x} > 5718,525$, alors rejeter H_0, sinon rejeter H_1.

Q 3.2 D'après le test précédent, peut-on conclure que le CAC40 a augmenté ?

Étant donné que la moyenne de notre échantillon est de 5726,025, qui est supérieur à 5718,525, notre test d'hypothèse nous dit de rejeter H_0 et donc de considérer qu'il est effectivement plus probable que la bourse ait augmenté.

Q 3.3 Calculez la puissance du test pour $\mu = 5726,025$. Pour vous aider, vous pourrez supposer que si une variable $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors :

$$P(Y > -1) = 0,8413 \qquad P(Y > -2) = 0,9772 \qquad P(Y > -3) = 0,9986 \qquad P(Y > -4) \approx 1$$

$$\begin{aligned}
1 - \beta(5726,025) &= P(\text{rejeter } H_0 | H_1 \text{ est vraie}) \\
&= P(\overline{X} > 5718,525 \mid \mu = 5726,025) \\
&= P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{5718,525 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \,\middle|\, \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0;1) \text{ et } \mu = 5726,025 \right) \\
&= P\left(\frac{\overline{X} - 5726,025}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{5718,525 - 5726,025}{\sigma/\sqrt{n}} \,\middle|\, \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0;1) \right) \\
&= P\left(\frac{\overline{X} - 5726,025}{6/4} > \frac{-7,5}{6/4} \,\middle|\, \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0;1) \right) \\
&= P\left(\frac{\overline{X} - 5726,025}{6/4} > -5 \,\middle|\, \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0;1) \right) \approx 1.
\end{aligned}$$

La puissance du test est donc approximativement de 1.

Exercice 4 (5 pts)

Tirer des nombres aléatoires sur ordinateur est, contrairement à ce que l'on pourrait croire, une tâche assez complexe à réaliser. Un nouvel algorithme a été développé à cet effet et nous nous demandons si les nombres qu'il fournit sont bien aléatoires. Il nous faudra une batterie de tests pour pouvoir décider si l'algorithme est bon. Parmi ceux-ci, il en existe un relativement simple : supposons que l'algorithme ne nous fournit que des nombres entre 0 et 9. Si ces nombres sont vraiment tirés aléatoirement, alors en en tirant suffisamment, on devrait se rapprocher d'une loi uniforme : probabilité 1/10ème de choisir n'importe quel nombre entre 0 et 9. On a donc exécuté l'algorithme 200 fois et on a obtenu les résultats suivants :

Valeur	effectif
0	14
1	24
2	18
3	20
4	23
5	13
6	23
7	18
8	24
9	23

Q 4.1 Calculez la moyenne de l'échantillon.

$$\overline{x} = \frac{1}{200}[0\times14+1\times24+2\times18+3\times20+4\times23+5\times13+6\times23+7\times18+8\times24+9\times23] = 4,7.$$

Q 4.2 À l'aide d'un test d'ajustement, testez si les nombres 0 à 9 sont distribués uniformément. Utilisez un niveau de test $\alpha = 0,05$ (niveau de confiance du test $= 95\%$).

Bien évidemment notre test d'hypothèse sera : H_0 = « l'algorithme tire uniformément les chiffres » v.s. H_1 = « le tirage n'est pas uniforme ». Si l'on avait eu une loi uniforme, chaque chiffre aurait du apparaître exactement 20 fois. Si l'on appelle X_i la variable « effectif » recensé pour le $i$ème chiffre, la statistique d'ajustement est donc :

$$D^2 = \sum_{i=0}^{9} \frac{(X_i - 20)^2}{20}.$$

On sait que cette statistique suit une loi χ^2_9, c'est-à-dire une loi du χ^2 à 9 degrés de liberté.

$$\begin{aligned} \alpha = 0,05 &= P(\text{rejeter } H_0 | H_0 \text{ est vraie}) \\ &= P\left(D^2 > d_\alpha \;\middle|\; D^2 \sim \chi^2_9\right). \end{aligned}$$

D'après la table du χ^2, $d_\alpha = 16,9$. Autrement dit, si la valeur d^2 de D^2 observée sur l'échantillon est supérieure à 16,9, alors on conclura que l'algorithme ne tire pas les chiffres uniformément, sinon on considèrera le tirage uniforme. Calculons maintenant la valeur de D^2 observée :

$$\begin{aligned} d^2 = \tfrac{1}{20}[&(14-20)^2 + (24-20)^2 + (18-20)^2 + (20-20)^2 + (23-20)^2 + (13-20)^2 + \\ &(23-20)^2 + (18-20)^2 + (24-20)^2 + (23-20)^2] = 7,6. \end{aligned}$$

Donc on peut effectivement estimer que le tirage est uniforme.