RFIDEC — cours 1 : Rappels de probas/stats (3/3)

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

Plan du cours 1.3

1. variables aléatoires
2. caractéristiques et variables aléatoires
2. indépendances de variables aléatoires
3. loi binomiale et loi de Poisson
4. loi normale

Variables aléatoires (1/2)

Exemple

- au début : vous avez 1000 €
- jeu : je tire 3 cartes parmi un jeu de 32 cartes et, suivant le tirage, je vous donne ou vous prend de l'argent :

			
2000 €	500 €	0 €	-1000 €

$P(2000\,€) = P(3 \text{ rois})$

$P(\text{gain} \geq 500\,€) = P(3 \text{ rois}) + P(2 \text{ rois})$

Variables aléatoires (2/2)

Définition

- Ω = univers muni d'une loi de proba $P(\cdot)$
- Ω' un autre ensemble
- 2^Ω et $2^{\Omega'}$ = ensemble des sous-ensembles de Ω et de Ω'
- *variable aléatoire* = fonction Γ de 2^Ω dans $2^{\Omega'}$ telle que :

$$\Gamma^{-1}(A') \in 2^\Omega \quad \forall A' \in 2^{\Omega'}.$$

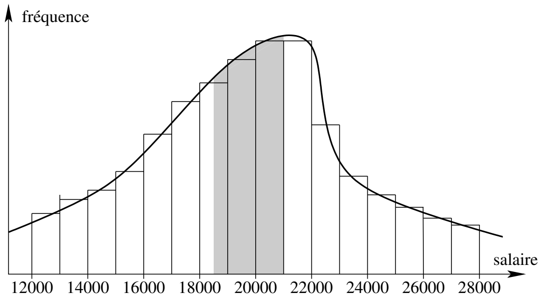
Probabilité sur Ω'

loi de proba $P'(\cdot)$ sur Ω' :

$$P'(A') = P\left(\Gamma^{-1}(A')\right) \quad \forall A' \in 2^{\Omega'}.$$

notation : $P(\Gamma = A') = P(\Gamma^{-1}(A'))$

Probabilités : retour sur le cas continu (1/2)



$$P(X \in I) = \int_I p(x)dx$$

avec P = proba et p = fonction de densité

$\Longrightarrow$ connaître p = connaître P

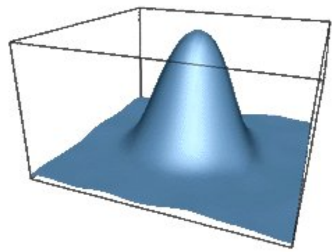
intervalles $]-\infty, x[\Longrightarrow$ fonction de répartition :

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)dy$$

Probabilités : retour sur le cas continu (2/2)

- variables bi-dimensionnelles, ou couples de variables, continues, (X, Y)
- densité de probabilité = $p(x, y)$
- fonction de répartition = $F(x, y)$
- alors $\forall x, y$:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) = \iint_{\{(x',y'):x'<x,y'<y\}} p(x', y')dx'dy'$$



Caractéristiques d'une loi de probabilités (1/3)

Caractéristiques

- Médiane M : $P(X \leq M) \geq \frac{1}{2}$ et $P(X \geq M) \geq \frac{1}{2}$
- Espérance mathématique ou moyenne : $E(X)$

  X discrète : $E(X) = \sum x_k p_k$

  X continue : $E(X) = \int x\, p(x)dx$

⚠ l'espérance mathématique n'existe pas toujours

- Mode : Mo de P (pas toujours unique) :

  X discrète : $p(Mo) = \max_k p(x_k)$

  X continue : $p(Mo) = \max_x p(x)$

Propriétés de l'espérance

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $\forall X, Y,\ E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Application de l'espérance (1/3)

- X = variable aléatoire $\approx$ 1 caractère dans une phrase
- domaine de $X = \{x_1, \ldots, x_{16}\}$

Encodage « classique d'une phrase » :

- 16 valeurs possibles $\Longrightarrow$ codage sur 4 bits

  $\Longrightarrow$ phrase de 10 caractères = 40 bits

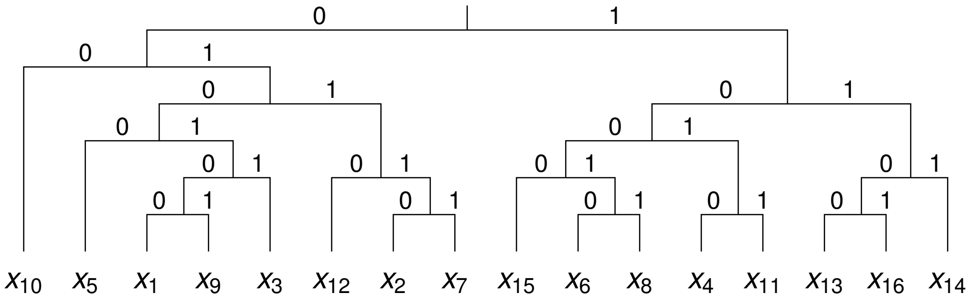
Proba d'apparition des caractères ($\times$100)															
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
1	3	2	6	5	4	2	3	1	21	6	5	9	17	7	8

- Minimisation de l'espérance du nombre de bits $\Longrightarrow$ compression

Application de l'espérance (2/3)

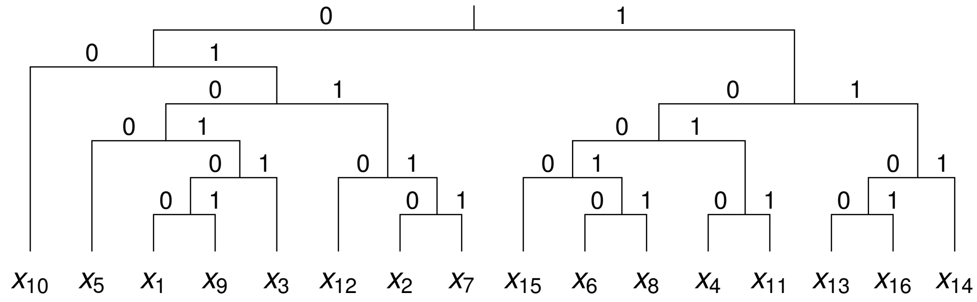
Proba d'apparition des caractères ($\times 100$)															
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
1	3	2	6	5	4	2	3	1	21	6	5	9	17	7	8

Codage de Huffman



$\Longrightarrow$ par exemple $x_3 = 01011$

Application de l'espérance (3/3)



Nombre de bits et proba ($\times 100$) par caractère																
X_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
nb bits	6	5	5	4	4	5	5	5	6	2	4	4	4	3	4	4
proba	1	3	2	6	5	4	2	3	1	21	6	5	9	17	7	8

Espérance du nombre de bits $= \sum_{i=1}^{16} p_i |\text{nb bits } x_i| = 3,59 < 4$

Caractéristiques d'une loi de probabilités (2/3)

Caractéristiques de dispersion

- variance : $V(X)$ ou σ^2 :

  X discrète : $\sigma^2 = \sum [x_k - E(X)]^2 p_k$

  X continue : $\sigma^2 = \int [x - E(X)]^2 p(x) dx$
- moyenne des carrés des écarts entre les valeurs prises par X et son espérance $E(X)$
- écart-type : σ = racine carrée de la variance
- variance et donc écart-type n'existent pas toujours

Caractéristiques d'une loi de probabilités (3/3)

Propriétés de la variance

- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- $\forall X, Y,\ V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$ où :
  - $cov(X,Y)$ = covariance de X et Y
  - si X et Y discrètes et $p_k = P(X = x_k, Y = y_k)$

    $$cov(X,Y) = \sum [x_k - E(X)][y_k - E(Y)] p_k$$
  - si X et Y continues, de densité $p(x,y)$,

    $$cov(X,Y) = \int\int [x - E(X)][y - E(Y)] p(x,y) dx dy$$

Indépendance de deux variables aléatoires (1/3)

Indépendance de deux variables discrètes

X et Y sont *indépendantes* si $\forall x, \forall y$:

les événements $X = x$ et $Y = y$ sont indépendants

- $\forall x, \forall y,\ P(X = x \cap Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y)$
- $\forall x, \forall y$ *t.q.* $P(Y = y) > 0,\ P(X = x | Y = y) = P(X = x)$
- $\forall y, \forall x$ *t.q.* $P(X = x) > 0,\ P(Y = y | X = x) = P(Y = y)$

Indépendance de deux variables aléatoires (2/3)

Indépendance de deux variables continues

X et Y sont *indépendantes* si $\forall I, \forall J$, intervalles,

les événements $X \in I$ et $Y \in J$ sont indépendants

Il suffit que les fonctions de répartition, F_X, F_Y de X et Y et F_{XY} du couple satisfassent :

$$\forall x, y,\ F_{XY}(x, y) = F_X(x) \times F_Y(y)$$

ou encore que les densités de probabilité p_X, p_Y de X et Y et p_{XY} du couple satisfassent :

$$\forall x, y,\ p_{XY}(x, y) = p_X(x) \times p_Y(y)$$

Indépendance de deux variables aléatoires (3/3)

Propriété

La covariance de deux variables indépendantes X et Y est toujours nulle

La réciproque est fausse

$$cov(X, Y) = \int\int [x - E(X)][y - E(Y)] p_{XY}(x, y) dx dy$$

X et Y indep $\Longrightarrow p_{XY}(x, y) = p_X(x) \times p_Y(y)$

$$\Longrightarrow cov(X, Y) = \int [x - E(X)] p_X(x) dx \int [y - E(Y)] p_Y(y) dy$$

Or $\int [x - E(X)] p_X(x) dx = \int x p_X(x) dx - \int E(X) p_X(x) dx$

$= E(X) - E(X) = 0$

$\Longrightarrow cov(X, Y) = 0 \times 0 = 0$

Indépendance mutuelle de n variables (1/3)

Définition

n variables $(X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots, X_n)$

Elles sont *mutuellement indépendantes* si tout événement lié à une partie d'entre elles est indépendant de tout événement lié à toute autre partie disjointe de la précédente

$\Longrightarrow$ c'est la généralisation naturelle de l'indépendance de deux variables :

des variables discrètes $(X_1, \ldots, X_k, \ldots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes lorsque :

$$\forall x_k \quad P\left(\bigcap_{k=1}^{n} X_k = x_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)$$

Indépendance mutuelle de n variables (2/3)

des variables continues $(X_1, \ldots, X_k, \ldots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes lorsque $\forall x_k \; (k = 1, \ldots, n)$:

$$p_{X_1 \ldots X_k \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} p_{X_k}(x_k)$$

L'indépendance mutuelle de n variables entraîne leur indépendance deux à deux

⚠ la réciproque n'est pas vraie

Indépendance mutuelle de n variables (3/3)

- Soit n dés à 6 faces
- X_k : variable aléatoire indiquant sur quelle face tombe le $k$ème dé
- tous les dés sont différents $\Longrightarrow X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes

$$p_{X_1 \ldots X_k \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} p_{X_k}(x_k)$$

$\Longrightarrow$ stockage mémoire = $6n$ au lieu de 6^n

n = 10	60	60 millions
n = 20	120	3,6 millions de milliards

Indépendance conditionnelle (1/2)

Indépendance conditionnelle de deux variables discrètes

X et Y sont *indépendantes conditionnellement à* Z si $\forall x, \forall y, \forall z$, les événements $X = x$ et $Y = y$ sont indépendants conditionnellement à $Z = z$

- $P(X = x \cap Y = y | Z = z) = P(X = x | Z = z) \times P(Y = y | Z = z)$
- si $P(Y = y | Z = z) > 0$ alors :
  $P(X = x | Y = y, Z = z) = P(X = x | Z = z)$
- si $P(X = x | Z = z) > 0$ alors :
  $P(Y = y | X = x, Z = z) = P(Y = y | Z = z)$

Indépendance conditionnelle (2/2)

Indépendance conditionnelle de deux variables discrètes

X et Y sont *indépendantes* conditionnellement à Z si :

- $P(X \cap Y | Z) = P(X|Z) \times P(Y|Z)$
- si $P(Y|Z) > 0$ alors $P(X|Y, Z) = P(X|Z)$
- si $P(X|Z) > 0$ alors $P(Y|X, Z) = P(Y|Z)$

Interprétation

- Conditionnement = apport de connaissances
- Si l'on connaît la valeur de la variable Z, alors connaître celle de Y n'apporte rien sur la connaissance de X

⚠ Ces formules s'étendent si X, Y et/ou Z sont remplacés par des ensembles de variables aléatoires disjoints 2 à 2

Application des probas conditionnelles (1/2)

- Classe de 40 étudiants
- assertion : «il y a au moins 2 étudiants qui sont nés le même jour»

Avez-vous intérêt à parier 10 € que cette assertion est vraie ?

- $X_i \in \{1, \dots, 365\}$ le jour de naissance du $i$ème étudiant
- que vaut P(tous les X_i sont différents) ?

Application des probas conditionnelles (2/2)

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(\text{tous les } X_i \text{ sont différents}) \\
&= P(X_2 \neq X_1) \times P(X_3 \notin \{X_1, X_2\} | X_2 \neq X_1) \times \\
&\quad P(X_4 \notin \{X_1, X_2, X_3\} | X_2 \neq X_1, X_3 \notin \{X_1, X_2\}) \times \dots \\
&= \prod_{i=2}^{40} P\left(X_i \notin \{X_j : j < i\} \,\middle|\, \bigwedge_{j<i} X_j \notin \{X_k : k < j\} \right) \\
&= \prod_{i=2}^{40} \frac{365 - (i-1)}{365} = \prod_{i=1}^{39} \frac{365 - i}{365} \approx 10,87\%
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ en choisissant au hasard une classe de 40 étudiants,
on a 10,87% de chances que l'assertion soit fausse

Loi de Bernoulli

Définition

Épreuve de Bernoulli = expérience aléatoire qui ne peut prendre que deux résultats (*succès* et *échec*)

p = proba de succès, et $q = 1 - p$ = proba d'échec.

Loi de Bernoulli

Variable X à support $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ telle que :

$P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$

$E(X) = p \quad V(X) = p(1-p)$

$\Longrightarrow X =$ le nombre de succès de l'épreuve de Bernoulli

Loi binomiale

Définition

Épreuve binomiale = expérience aléatoire telle que :

1. on répète n fois la même épreuve de Bernoulli,
2. les probas p et q restent inchangées pour chaque épreuve de Bernoulli,
3. les épreuves de Bernoulli sont toutes réalisées indépendamment les unes des autres.

Loi binomiale de paramètres n et p

- X = nombre de succès de l'épreuve binomiale
- $X \sim \mathcal{B}(n, p)$
- $P(X = k) = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k}, \forall k = 0, \dots, n$
- $E(X) = np \quad V(X) = np(1-p)$

Loi de Poisson

Définition

- *Loi de Poisson* ou loi des événements rares :
  loi vers laquelle tend la loi binomiale lorsque n est très grand et p assez petit
- variable discrète $X \sim$ *loi de* POISSON de paramètre $\lambda > 0$:
  $\Longrightarrow$ les événements élémentaires $e_k = \ll X = k \gg$, $k \in \mathbb{N}$, ont pour probabilités :

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^k}{k!}$$

- $E(X) = \lambda \quad V(X) = \lambda$

$\Longrightarrow$ s'applique dans le cas d'expériences dont les occurrences sont totalement aléatoires (sans régularité) et indépendantes les unes des autres

Lois géométrique et exponentielle

Définition : loi géométrique de paramètre p

- loi de la variable donnant le nombre d'essais nécessaires pour que se produise un événement de probabilité p
- $P(X = k) = p(1-p)^{(k-1)}$, $k = 1, \ldots, n, \ldots$
- $E(X) = \frac{1}{p} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Définition : loi exponentielle de paramètre λ

- a pour support $\mathbb{N}_+^*$ et pour densité
  $p(x) = \lambda \exp\{-\lambda x\}$, $x > 0$
- $E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- utilisée en fiabilité : durée de vie de nombreux composants
  λ = *taux de défaillance*
  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ = *temps moyen entre défaillances*

Loi normale

⚠ Loi extrêmement importante : souvent une très bonne approximation de la loi réelle

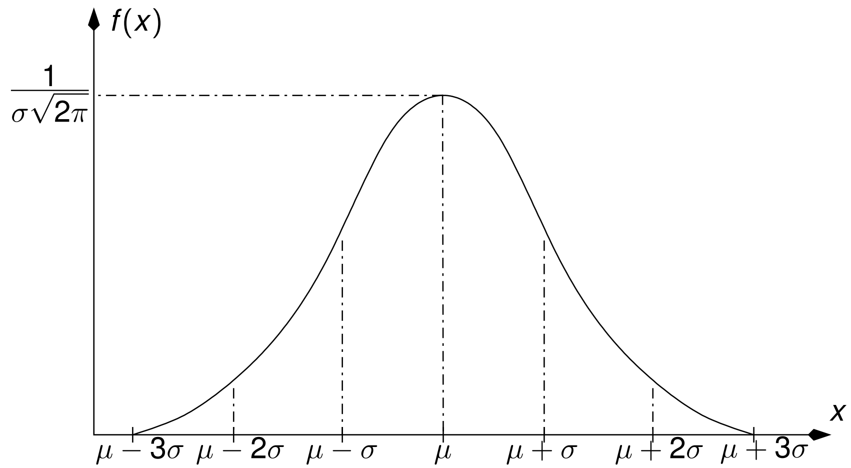
Définition : loi normale de paramètres μ et σ^2

- notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- s'applique pour des variables aléatoires continues
- densité positive sur tout $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

- $E(X) = \mu \quad V(X) = \sigma^2$

Fonction de densité de la loi normale

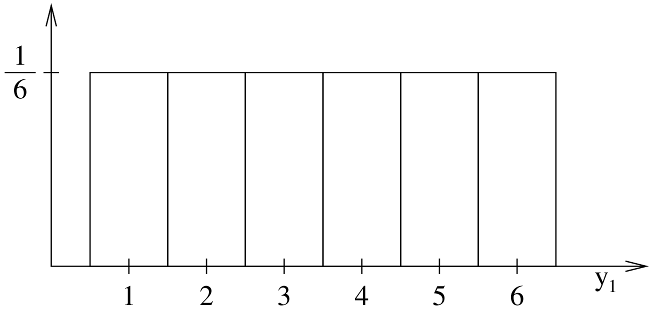


Loi normale = limite d'autres lois (1/4)

Lancés de dés à 6 faces

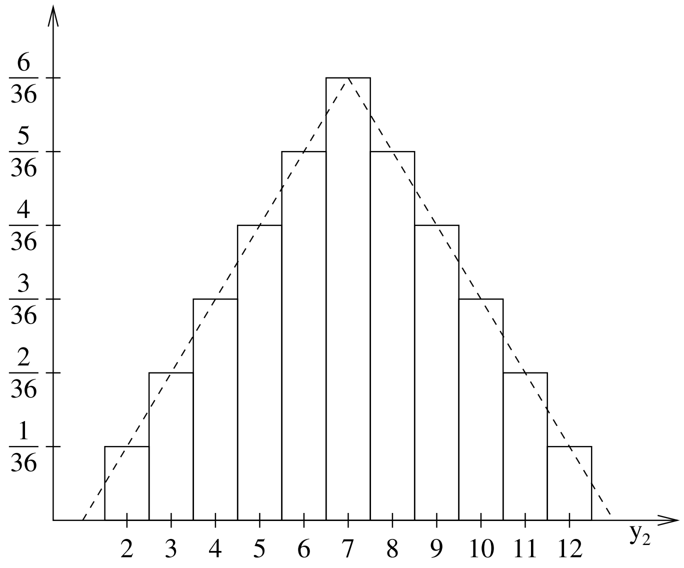
$\Longrightarrow$ on compte la somme des résultats des dés

Somme pour 1 jet de dé



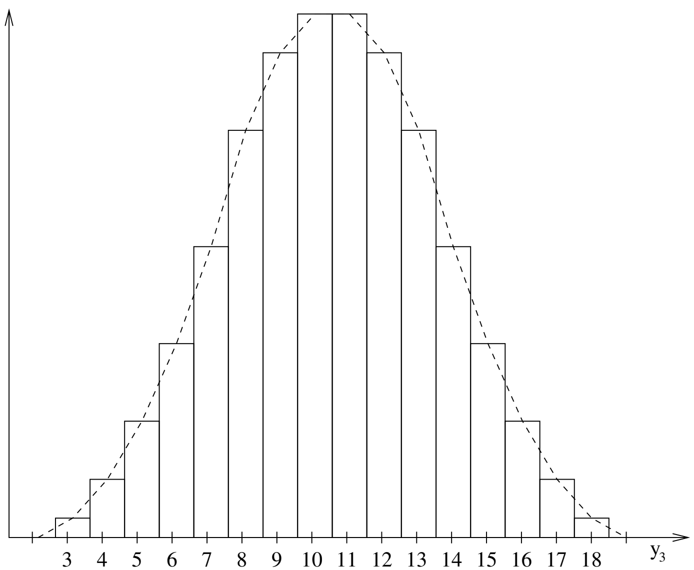
Loi normale = limite d'autres lois (2/4)

Somme pour 2 jets de dés



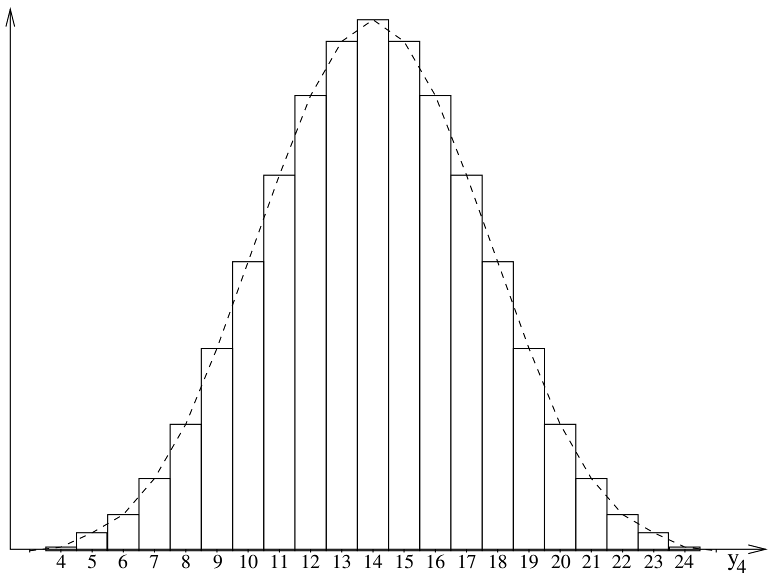
Loi normale = limite d'autres lois (3/4)

Somme pour 3 jets de dés



Loi normale = limite d'autres lois (4/4)

Somme pour 4 jets de dés



Loi normale en pratique

Théorème

$X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

Alors la variable $Y = aX + b$ obéit à la loi $\mathcal{N}(a\mu + b; a^2\sigma^2)$.

$\Longrightarrow$ toute transformée affine d'une variable aléatoire suivant une loi normale suit aussi une loi normale

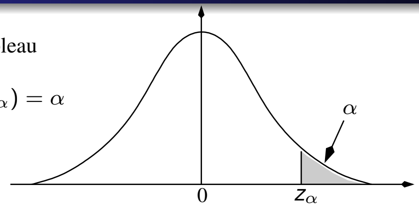
Corollaire

- X une variable aléatoire obéissant à une loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

  $\Longrightarrow Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$
- Z suit une loi normale centrée (à cause de la moyenne en 0) réduite (à cause du σ^2 égal à 1)

Table de la loi normale centrée réduite

valeurs dans le tableau ci-dessous : les α tels que $P(Z > z_\alpha) = \alpha$



z_α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0859	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0722	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0466	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0352	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233

Loi normale bi-dimensionnelle

Définition : loi normale bi-dimensionnelle

- couple de variables (X, Y)
- densité dans $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \times$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\}$$

où $\rho = \dfrac{cov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}$ = *coefficient de corrélation linéaire*