RFIDEC — cours 1 : Rappels de probas/stats (2/3)

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

Plan du cours 1.2

1. probabilités : événements, définition
2. probabilités conditionnelles
3. formule de Bayes
4. indépendance, indépendance conditionnelle

Les probabilités : objectives ou subjectives ? (1/2)

Qu'est-ce qu'une probabilité ?

Probabilités subjectives (de Finetti)

Les probabilités expriment le degré d'incertitude que les individus accordent à des événements incertains.

Exemple : dans un journal, « certains observateurs de la vie politique pensent qu'il y a une chance sur quatre pour que la rencontre au sommet ait lieu avant novembre »

$\Longrightarrow P(\text{rencontre avant novembre}) = 0,25$

Probabilités objectives

Les probabilités ne dépendent pas d'appréciations personnelles et doivent être fondées uniquement sur des données *objectives*.

$\Longrightarrow$ probas introduites au XVIème, XVIIème et XVIIIème siècles (Cardano, De Moivre, Pascal, Bernoulli, Laplace)

$\Longrightarrow$ données fréquentistes

$\Longrightarrow$ dans les années 30 : axiomatique de Kolmogorov

Les probabilités : outil indispensable

Richard T. Cox

- machine pour gérer des incertitudes
- Rationalité :

  $\Longrightarrow$ probas = seule représentation possible des incertitudes

rationnel = 5 desideratas :

1. incertitude d'un événement évaluée de plusieurs manières $\Longrightarrow$ même résultat
2. petites modif d'un événement $\Longrightarrow$ petit changement sur l'incertitude
3. représentation universelle : s'applique à tout problème
4. évaluer l'incertitude d'un événement $\Longrightarrow$ événement défini sans ambiguïté
5. évaluation $\Longrightarrow$ utiliser toutes les infos à disposition

Vocabulaire

Exemple : lancer d'un dé à 6 faces

Définition

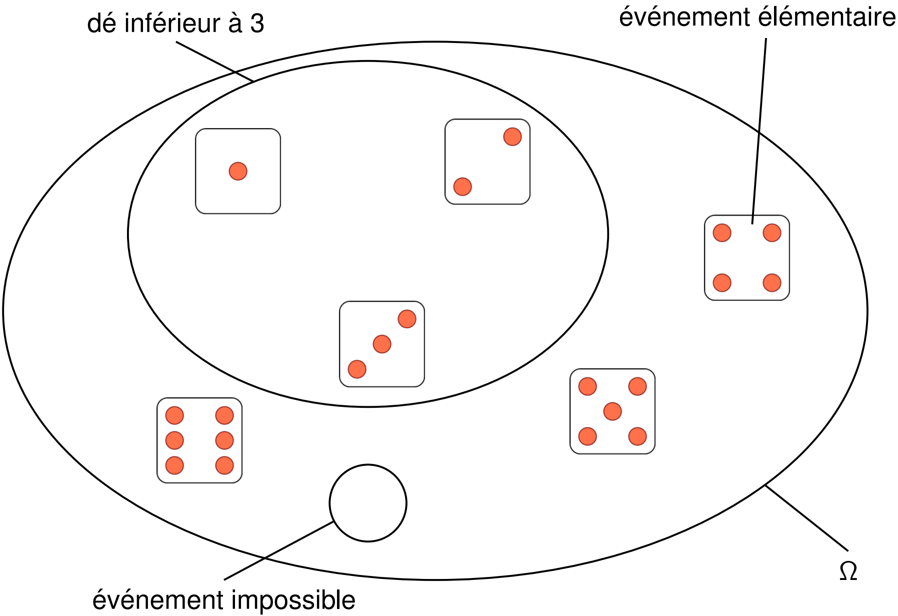
- événement : tout ce qui peut se réaliser ou pas à la suite d'une expérience

    exemple : ≪ obtenir un 4 ≫, ≪ ne pas obtenir un 4 ≫, ≪ obtenir un chiffre inférieur à 3 ≫
- événement certain : assuré de se produire

    exemple : ≪ obtenir un chiffre inférieur à 7 ≫
- événement impossible : ne se produira jamais

    exemple : ≪ obtenir un chiffre supérieur à 7 ≫
- événement élémentaire : seulement un seul résultat de l'expérience permet de le réaliser

    exemple : ≪ obtenir 4 ≫ mais
    ≪ obtenir un chiffre pair ≫ = pas élémentaire
- univers Ω : ensemble des événements élémentaires


dé inférieur à 3
événement élémentaire
Ω
événement impossible

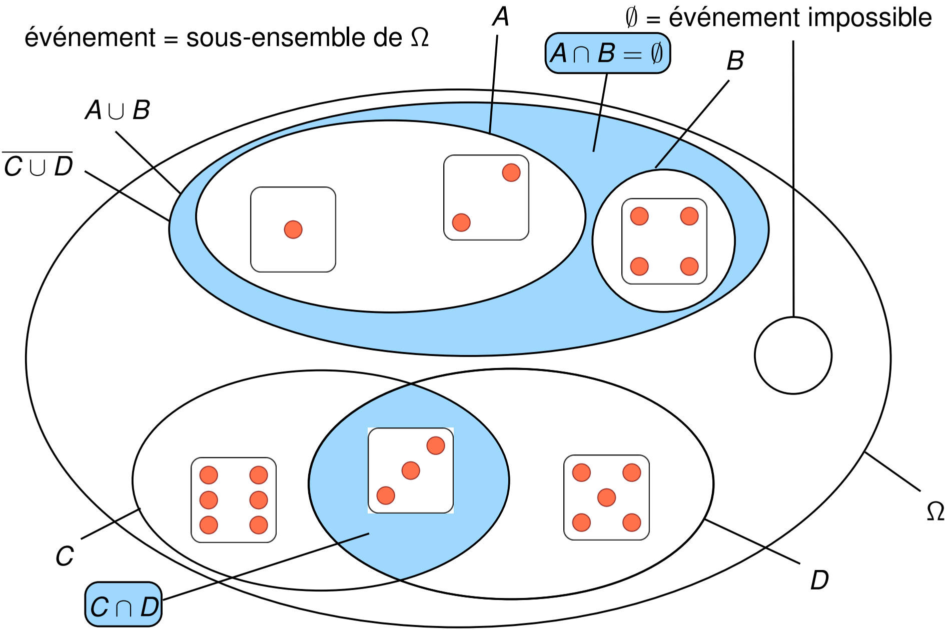
Les événements, des ensembles ?

- événements = sous-ensembles de Ω
- $\emptyset$ = événement impossible
- $A \cup B$ = événement qui est réalisé si A ou B est réalisé
- $C \cap D$ = événement qui est réalisé si C et D sont réalisés
- $\overline{C \cup D}$ = complémentaire de $C \cup D$ dans Ω

  = événement qui est réalisé ssi $C \cup D$ ne l'est pas
- $A \cap B = \emptyset$ = 2 événements qui ne peuvent se réaliser simultanément

Les événements, des ensembles ?

événement = sous-ensemble de Ω



Définition des probabilités (Kolmogorov)

- Ω = ensemble fini ou dénombrable d'événements élémentaires e_k, $k \in K \subseteq \mathbb{N}$
- $\mathcal{A} = 2^\Omega$ = ensemble des événements
- pour tout $A \in \mathcal{A}$, $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- $A = \bigcup_{k \in L} A_k$, avec L ensemble dénombrable et, $\forall j, k \in L$, $j \neq k$, $A_j \cap A_k = \emptyset$, $P(A) = \sum_{k \in L} P(A_k)$.

$\Longrightarrow$ Les probabilités des événements élémentaires déterminent entièrement P

conséquence : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Définition des probabilités : le cas continu (1/3)

Chaque événement élémentaire a une proba = 0

Mais proba d'être dans un intervalle $\neq 0$

1ère étape : discrétisation

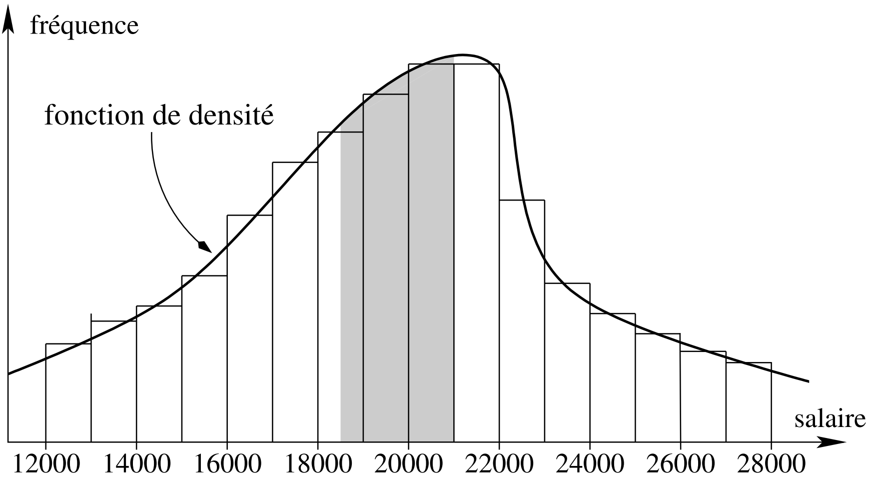
transformer Ω en un ensemble dénombrable de classes

Exemple : salaires $\Longrightarrow$ 8 classes :

[12K€, 14K€[, [14K€, 16K€[, [16K€, 18K€[, ... , [26K€, $+\infty$[

Définition des probabilités : le cas continu (2/3)

Histogramme : surface = fréquence ≈ proba



Définition des probabilités : le cas continu (3/3)

Probabilité d'un événement

- fonction de densité
- $P(A)$ = surface délimitée par la fonction de densité dans la zone où les événements sont inclus dans A

- P(événement élémentaire) = 0
- La surface délimitée par la fonction de densité sur tout Ω est égale à 1
- Les valeurs prises par la fonction de densité sont ≥ 0 partout

Probabilités conditionnelles (1/5)

Définition

la probabilité d'un événement A conditionnellement à un événement B, que l'on note $P(A|B)$, est la probabilité que A se produise sachant que B s'est ou va se produire

Problème : comment calculer $P(A|B)$?

$P(A|\Omega) = P(A)$ puisqu'on sait que Ω sera réalisé

Probabilités conditionnelles (2/5)

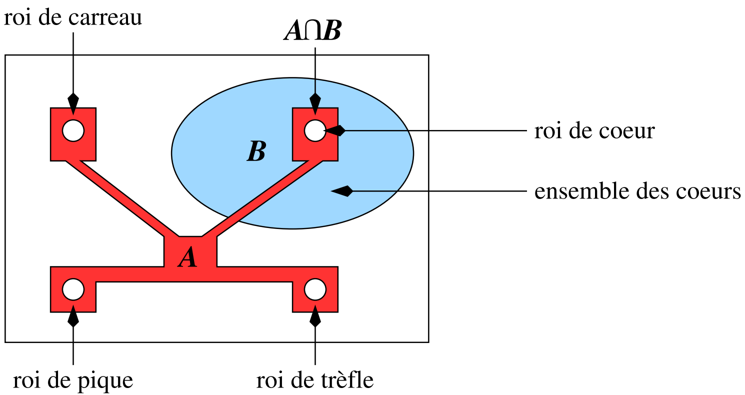
Exemple

- Tirer une carte parmi un jeu de 32 cartes
- $\Omega = \{32 \text{ cartes}\}$
- événements : $A =$ tirer un roi $\qquad B =$ tirer un cœur
- $P(A|B) = ?$

Si A se produit, sachant que B s'est aussi produit

$\Longrightarrow A \cap B$ se produit

$\Longrightarrow P(A|B) = P(A \cap B|B)$



$\Longrightarrow$ on cherche la probabilité que le cercle $A \cap B$, qui est inclus dans B, soit réalisé, sachant que l'événement B est réalisé

$\Longrightarrow$ $P(B) = 1$ et B peut jouer le rôle d'univers pour $A \cap B$

Probabilités conditionnelles (4/5)

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} \times \frac{|\Omega|}{|B|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Définition

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ quand $P(B) > 0$

Probabilités conditionnelles (5/5)

$B_k,\ k \in K$ partition de Ω

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left[\bigcup_{k \in K} B_k\right] = \bigcup_{k \in K} [A \cap B_k]$$

$$P(A) = \sum_{k \in K} P(A \cap B_k)$$

Or $P(A|B_k) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(B_k)} \Longrightarrow P(A \cap B_k) = P(A|B_k)P(B_k)$

$$P(A) = \sum_{k \in K} P(A|B_k)P(B_k)$$

Application peu pratique

Paquet 1

Paquet 2

- Dans chaque paquet : des cartes gagnantes et des cartes perdantes
- Dans chaque paquet, tirer 1 carte marron $\Longrightarrow$ plus de chance d'avoir une carte gagnante que si on tire une carte bleue

Paquet 3 = paquet 1 $+$ paquet 2

Pb : Doit-on choisir une carte bleue ou marron dans le paquet 3 ?

Application peu pratique — suite

Paquet 1

	Bleue	Marron
Gagnante	1	2
Perdante	3	5

Paquet 2

	Bleue	Marron
Gagnante	5	3
Perdante	2	1

$$P(\text{Gagnante}|\text{Bleue}) = \begin{cases} 1/4 \text{ pour le paquet 1} \\ 5/7 \text{ pour le paquet 2} \end{cases}$$

$$P(\text{Gagnante}|\text{Marron}) = \begin{cases} 2/7 \text{ pour le paquet 1} \\ 3/4 \text{ pour le paquet 2} \end{cases}$$

Remarque : $1/4 < 2/7$ et $5/7 < 3/4$

$\Longrightarrow$ pour chaque paquet, choisir de préférence une carte marron

Application peu pratique — suite

Paquet 3

	Bleue	Marron
Gagnante	6	5
Perdante	5	6

$P(\text{Gagnante}|\text{Bleue}) = 6/11$

$P(\text{Gagnante}|\text{Marron}) = 5/11$

$\Longrightarrow$ pour chaque paquet, choisir de préférence une carte bleue

Application peu pratique — fin

Paquet 1

	Bleue	Marron
G	1	2
P	3	5

Paquet 2

	Bleue	Marron
G	5	3
P	2	1

Paquet 3

	Bleue	Marron
G	6	5
P	5	6

Calculs pour le paquet 3 :

$$\begin{aligned}
P(\text{G}|\text{Bleue}) &= P(\text{G,Paquet 1}|\text{Bleue}) + P(\text{G,Paquet 2}|\text{Bleue}) \\
&= P(\text{G}|\text{Paquet 1,Bleue}) \times P(\text{Paquet 1}|\text{Bleue}) \\
&\quad + P(\text{G}|\text{Paquet 2,Bleue}) \times P(\text{Paquet 2}|\text{Bleue}) \\
&= P(\text{G}|\text{Paquet 1,Bleue}) \times 4/11 \\
&\quad + P(\text{G}|\text{Paquet 2,Bleue}) \times 7/11 \\
P(\text{G}|\text{Marron}) &= P(\text{G}|\text{Paquet 1,Marron}) \times 7/11 \\
&\quad + P(\text{G}|\text{Paquet 2,Marron}) \times 4/11
\end{aligned}$$

probas conditionnelles non pondérées par les mêmes poids

$\Longrightarrow$ choisir une carte bleue pour le paquet 3

Théorème de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A|B)P(B) \\ &= P(B|A)P(A) \end{aligned}$$

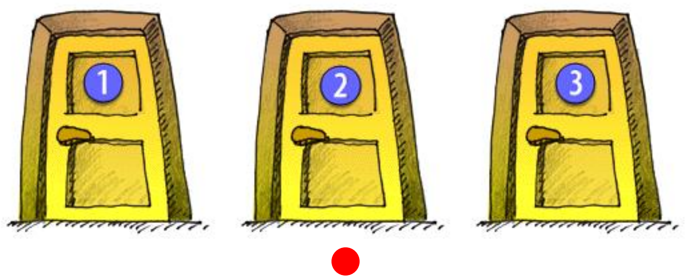
Théorème de Bayes

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \quad \forall A, B \text{ tels que } P(A) \neq 0 \text{ et } P(B) \neq 0$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{\sum_B P(A|B)P(B)}$$

Monty Hall

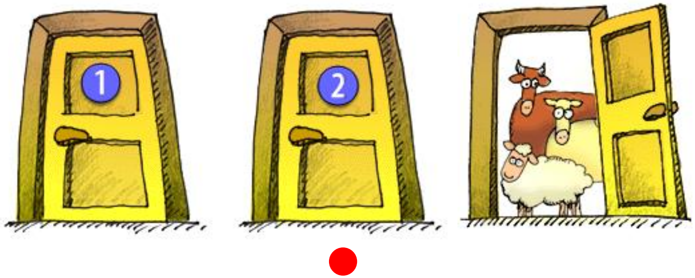
http://www.apprendre-en-ligne.net/random/monty/



- derrière une des portes = 1 bateau
- derrière les autres portes : des moutons

proba que le bateau se trouve derrière la porte ?

Monty Hall



L'animateur choisit au hasard une des 2 autres portes qui contient des moutons et l'ouvre.

Choix : conserver la porte 2 ou choisir la porte 1 ?

calculer la proba que le bateau soit derrière la porte 1 ou la 2

3 événements élémentaires :

- B1 : le bateau est derrière la porte 1
- B2 : le bateau est derrière la porte 2
- B3 : le bateau est derrière la porte 3

E = événement « l'animateur a choisi, parmi les portes 1 et 3, d'ouvrir la porte 3 »

Choix $\Longrightarrow P(B1|E)$ et $P(B2|E)$

Monty Hall

E = événement ≪ l'animateur a choisi, parmi les portes 1 et 3, d'ouvrir la porte 3 ≫

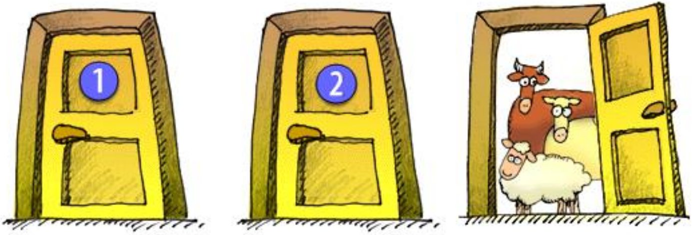
Formule de Bayes : $P(B1|E) = \dfrac{P(E|B1)P(B1)}{P(E)}$

- $P(E|B1) = 1$
- $P(B1) = 1/3$
- $P(E) = P(E|B1)P(B1) + P(E|B2)P(B2) + P(E|B3)P(B3)$
  $= 1 \times 1/3 + 1/2 \times 1/3 + 0 \times 1/3 = 1/2$

$$P(B1|E) = \frac{1 \times 1/3}{1/2} = 2/3$$

$P(B2|E) = 1 - P(B1|E) - P(B3|E) = 1/3$

Monty Hall



$P(B1|E) = 2/3$

$P(B2|E) = 1/3$

Indépendance probabiliste (1/2)

Définition de l'indépendance

deux événements A et B sont indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

si $P(B) > 0$ alors $P(A|B) = P(A)$

l'indépendance n'est pas une propriété du couple (A, B) mais du couple $(\{A, A^c\}, \{B, B^c\})$:

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants} &\Longrightarrow A \text{ et } B^c \text{ indépendants} \\ &\Longrightarrow A^c \text{ et } B \text{ indépendants} \\ &\Longrightarrow A^c \text{ et } B^c \text{ indépendants} \end{aligned}$$

Indépendance probabiliste (2/2)

Démonstration :

A et B sont indépendants $\Longrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\
&= P(A) - P(A) \times P(B) \\
&= P(A) \times [1 - P(B)] \\
&= P(A) \times P(B^c)
\end{aligned}$$

Indépendance conditionnelle

$P(A|B) \approx$ restriction de l'espace Ω à B

Définition de l'indépendance conditionnelle

deux événements A et B sont indépendants conditionnellement à C si :

$$P(A \cap B|C) = P(A|C) \times P(B|C)$$

si $P(B \cap C) > 0$ alors $P(A|B, C) = P(A|C)$

l'indépendance conditionnelle n'est pas une propriété du couple (A, B) mais du couple $(\{A, A^c\}, \{B, B^c\})$:

A et B sont indépendants conditionnellement à C

$\Longrightarrow$ A et B^c indépendants conditionnellement à C

$\Longrightarrow$ A^c et B indépendants conditionnellement à C

$\Longrightarrow$ A^c et B^c indépendants conditionnellement à C