RFIDEC — cours 1 : Rappels de probas/stats (1/3)

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

Modalités de contrôle

- Pas de contrôle continu
- Note finale d'UE en trois parties :
  1. Examen écrit en milieu de semestre (35%)
  2. Examen écrit en fin de semestre (35%)
  3. Contrôle sur machine (30%)

Introduction à la reconnaissance des formes

Reconnaissance des formes

Algorithmes $\Longrightarrow$ reconnaissance automatique de régularités, de motifs dans un amas de données.

Utilisation de ces motifs pour des tâches (classification, etc)

Exemple :

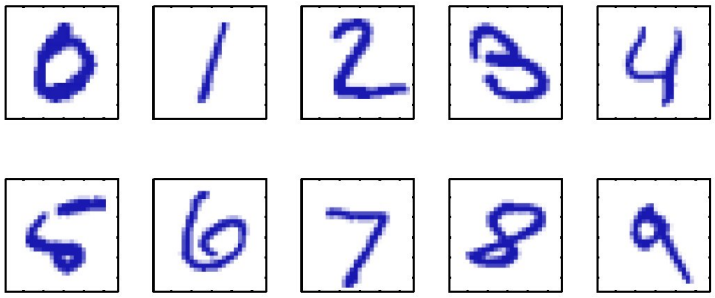
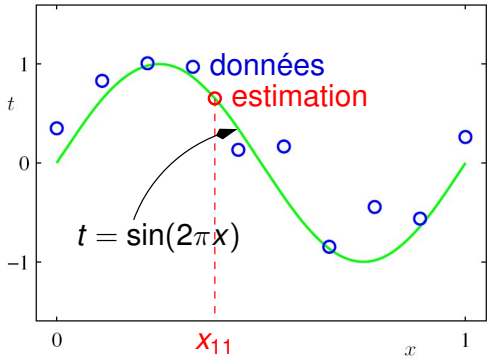


Image = données (pixels) *Classification* = reconnaître le chiffre

Exemple : problème d'ajustement (1/5)



Observations
(x_1, t_1)
$\vdots$
(x_{10}, t_{10})

$\Longrightarrow$ courbe $\sin(2\pi x)$ $\Longrightarrow$ estimation de t_{11}

$\Longrightarrow$ reconnaissance de la courbe verte

Exemple : problème d'ajustement (2/5)

Idée : estimer la courbe verte par un polynôme :

$$y(x, \mathbf{w}) = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \cdots + w_M x^M = \sum_{j=0}^{M} w_j x^j$$

$\Longrightarrow$ Problèmes :

- déterminer les « meilleurs » coefficients w_j
- déterminer la « meilleure » valeur de M

« meilleur » $\Longrightarrow$ critère d'optimalité

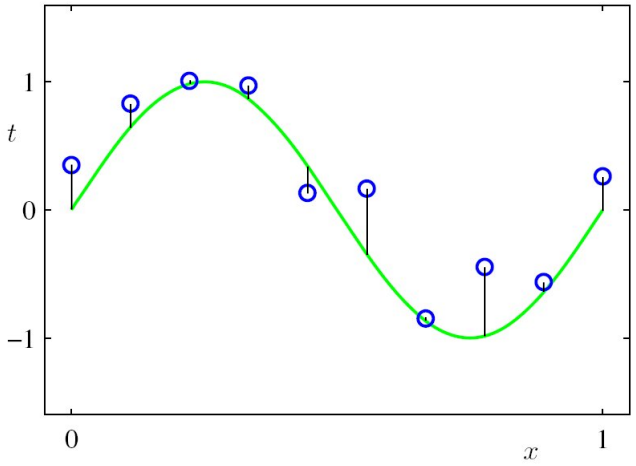
critère d'optimalité possible

Minimiser une fonction d'erreur mesurant l'inadéquation entre la courbe $y(x, \mathbf{w})$ et les points observés :

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10} [\, y(x_i, \mathbf{w}) - t_i \,]^2$$

Exemple : problème d'ajustement (3/5)

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10} [\, y(x_i, \mathbf{w}) - t_i \,]^2$$



Exemple : problème d'ajustement (4/5)

Problème 1 : $\mathbf{w}^*$ tel que $\mathbf{w}^* = \min_{\mathbf{w}} E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10} [\, y(x_i, \mathbf{w}) - t_i \,]^2$

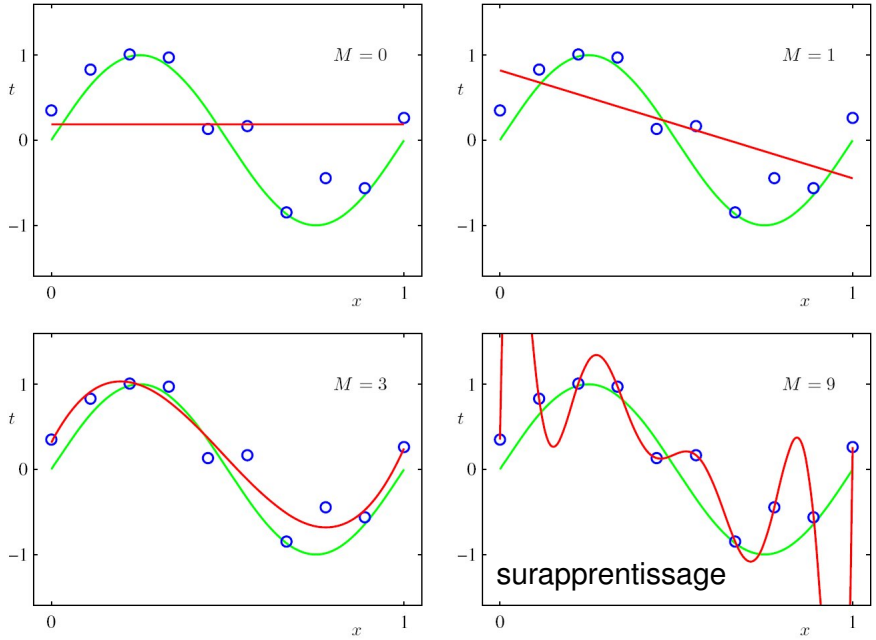
$E(\mathbf{w})$ fonction quadratique en $\mathbf{w}$ $\Longrightarrow$ 1 seule solution

$$\Longrightarrow \frac{dE(\mathbf{w})}{d\mathbf{w}} = 0$$

$\Longrightarrow$ résoudre un système linéaire

Problème 2 : Choix de M $\Longrightarrow$ sélection de modèle

Exemple : problème d'ajustement (5/5)



Plan général du cours

1. Introduction et rappels de proba/stat
2. Estimations ponctuelles à partir d'échantillons
3. Intervalles de confiance, tests d'hypothèses
4. Tests d'ajustement et maximum de vraisemblance
5. MAP et apprentissage non paramétrique
6. Régression linéaire
7. Clustering (K-means, Kohonen)
8. Classification bayésienne
9. Classification gaussienne
10. Classifieur linéaire : LDA, perceptron

Plan du cours 1.1

1. Introduction à la statistique descriptive
2. vocabulaire de stat descriptive
3. distributions et représentations
4. indicateurs de « moyenne »
5. indicateurs de dispersion

Intro à la statistique descriptive

Statistique

- recueil de données
- traitement de ces données
- l'exploitation (interprétation, prévision, etc) sort du cadre de la stat descriptive

Principe de la statistique descriptive

- des amas de données
- stat descriptive $\Longrightarrow$ synthèse, résumé d'informations

données synthétiques $\Longrightarrow$ exploitation

⚠ pas forcément besoin de probabilités

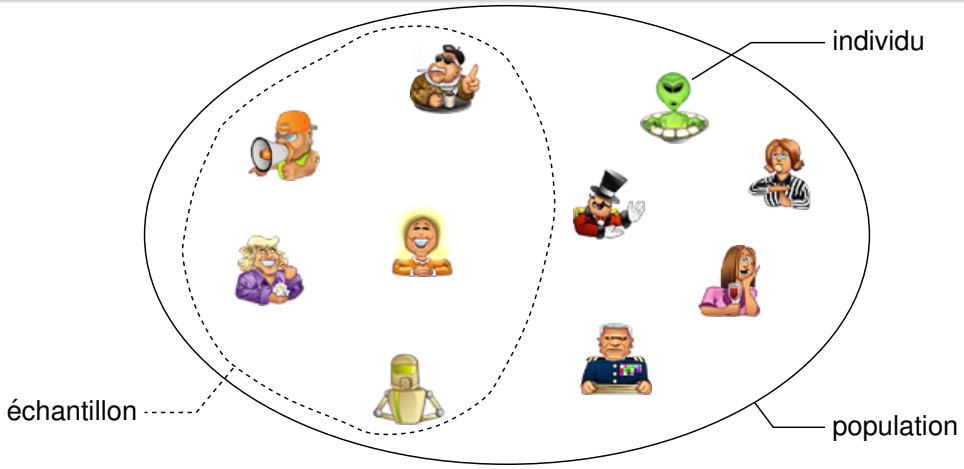
Exemple

Salaires de cadres masculins (exprimés en k€)												
18	10	12	12	10	14	14	14	12	12	16	18	10
16	16	12	12	14	14	14	14	12	16	14	14	16
12	10	18	12	18	18	14	14	14	12	16	14	16
10	16	16	14	14	14	12	16	16	14	14	12	14

Salaires de cadres féminins (exprimés en k€)												
16	16	14	14	14	14	10	12	12	08	20	14	14
14	20	14	12	12	16	10	10	18	10	16	12	12
14	18	12	12	16	08	14	10	12	14	12	16	14

Question : Les hommes sont-ils mieux payés que les femmes ?

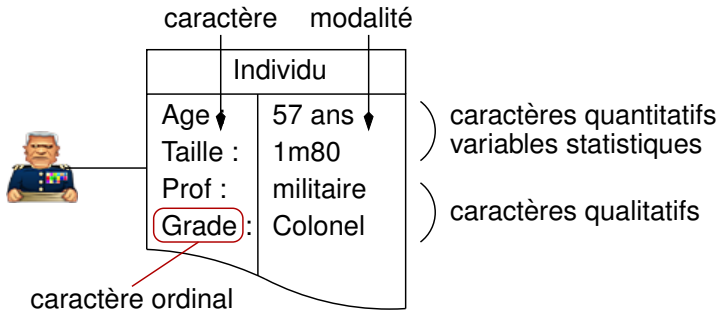
Vocabulaire (1/3)



Définitions

- population (statistique) : ensemble des objets (ou personnes) sur lesquels porte l'étude
- individu : chaque élément de la population

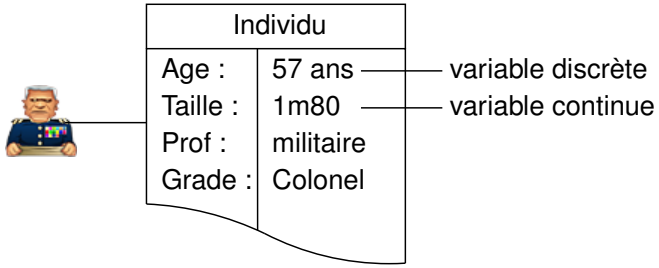
Vocabulaire (2/3)



Définitions

- Caractères : critères d'étude de la population
- Modalités : les valeurs que peuvent prendre les caractères
- Caractère quantitatif ou Variable statistique : ensemble de modalités = des nombres + échelle mathématique
- Caractère qualitatif ou Variable catégorielle : caractère non quantitatif
- Caractère ordinal : les modalités sont ordonnées

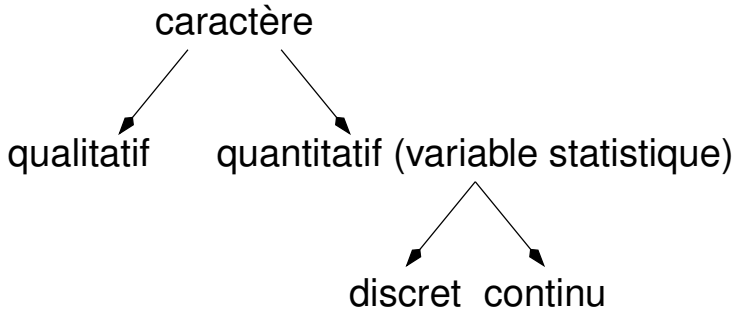
Vocabulaire (3/3)



Définitions sur les variables statistiques

- Variable discrète : définie sur un espace discret (par exemple des entiers)
- Variable continue : définie sur un continuum (toutes les valeurs numériques d'un intervalle)

Résumé : classification des caractères



Effectifs, fréquences et distributions

Quelques définitions

- X : caractère défini sur une population de N individus
- $\{x_1, \ldots, x_l\}$ modalités de X
- N_i = effectif de x_i
  = nombre d'individus pour lesquels X a pris la valeur x_i
- fréquence ou effectif relatif : $f_i = \frac{N_i}{N}$
- distribution de X : ensemble des couples $\{(x_1, f_1), (x_2, f_2), \ldots\}$

Idée :

calculer la distribution des caractères sur l'amas de données
$\Longrightarrow$ résume les informations importantes

Diagrammes en bâtons

Définition du diagramme en bâtons

- caractère X de distribution $\{(x_1, f_1), (x_2, f_2), (x_3, f_3), \ldots\}$
- diagramme en bâtons = graphe dans lequel on associe à chacune des modalités x_i (représentées sur l'axe horizontal) un bâton de hauteur f_i
- représentation en colonnes : idem mais en élargissant les bâtons

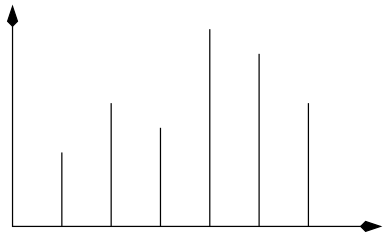
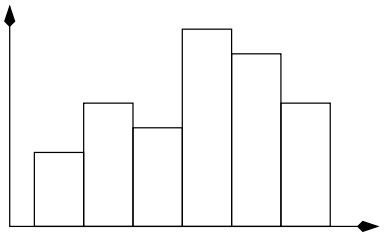


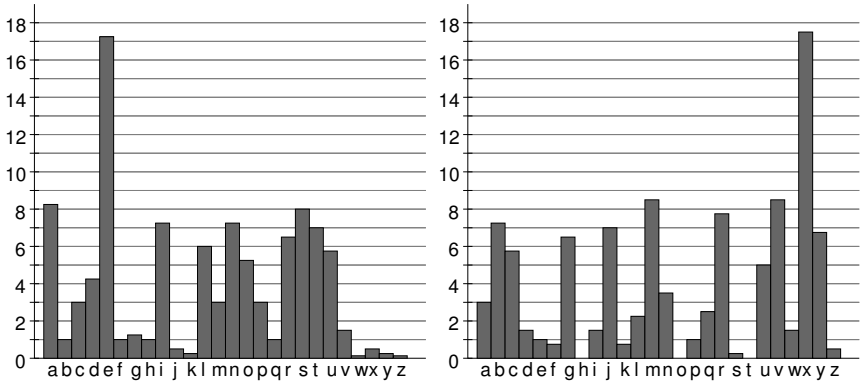
diagramme en bâtons



représentation en colonnes

Application du diagramme en bâtons

```
XY AXJ BYRJMYJ, MQQMVUVXYJ GXR NCBWJR N'UYX
LMBY N'PCLLX XJ BGR XAVBDBVXYJ, XY IMAX NU
AMYNXGMFVX, RUV GX QGMJVX NU LUV NU QMGMBR
VCEMG.
```

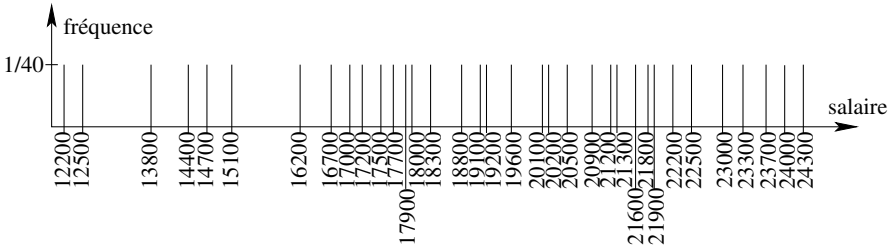


fréquence théorique des lettres en français

fréquence des lettres du cryptogramme

Problèmes des diagrammes en bâtons

Salaires des cadres masculins (en k€)								
19,6	12,5	17,7	18,8	19,1	14,7	21,9	22,5	21,8
20,1	16,2	20,5	12,2	25,4	20,9	21,2	15,5	21,3
17,9	25,0	14,4	21,7	18,3	16,7	23,0	17,0	24,3
27,0	27,7	18,0	17,5	23,7	21,6	13,8	22,2	19,2
20,2	15,1	19,6	17,2	23,3	24,0			



variables continues $\Longrightarrow$ diagramme en bâtons inutilisable

Discrétisation

Idée force : utiliser les diagrammes en bâton ssi la taille de la population $\gg$ au nombre de modalités des caractères

sinon $\Longrightarrow$ discrétiser le caractère

Discrétisation

regrouper toutes les modalités appartenant à certains intervalles dans des classes de données

Caractéristiques d'une classe

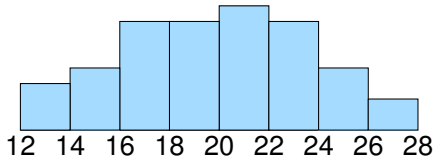
- $\mathcal{C}$: la classe $[a, b[$
- centre de la classe $\mathcal{C}$: $c = \frac{a+b}{2}$
- amplitude de la classe $\mathcal{C}$: $h = b - a$

Exemple de discrétisation (1/3)

Salaires des cadres masculins (en k€)								
19,6	12,5	17,7	18,8	19,1	14,7	21,9	22,5	21,8
20,1	16,2	20,5	12,2	25,4	20,9	21,2	15,5	21,3
17,9	25,0	14,4	21,7	18,3	16,7	23,0	17,0	24,3
27,0	27,7	18,0	17,5	23,7	21,6	13,8	22,2	19,2
20,2	15,1	19,6	17,2	23,3	24,0			

Classe de salaire	effectif	fréq.	Classe de salaire	effectif	fréq.
$[12000, 14000[$	3	$3/42$	$[20000, 22000[$	8	$8/42$
$[14000, 16000[$	4	$4/42$	$[22000, 24000[$	7	$7/42$
$[16000, 18000[$	7	$7/42$	$[24000, 26000[$	4	$4/42$
$[18000, 20000[$	7	$7/42$	$[26000, 28000[$	2	$2/42$

Diagramme en colonnes :

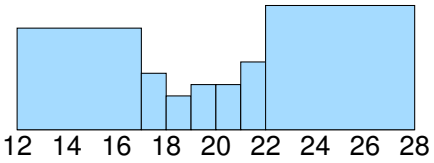


Exemple de discrétisation (2/3)

Salaires des cadres masculins (en k€)								
19,6	12,5	17,7	18,8	19,1	14,7	21,9	22,5	21,8
20,1	16,2	20,5	12,2	25,4	20,9	21,2	15,5	21,3
17,9	25,0	14,4	21,7	18,3	16,7	23,0	17,0	24,3
27,0	27,7	18,0	17,5	23,7	21,6	13,8	22,2	19,2
20,2	15,1	19,6	17,2	23,3	24,0			

Classe de salaire	effectif	fréq.	Classe de salaire	effectif	fréq.
$[12000, 17000[$	9	$9/42$	$[20000, 21000[$	4	$4/42$
$[17000, 18000[$	5	$5/42$	$[21000, 22000[$	6	$6/42$
$[18000, 19000[$	3	$3/42$	$[22000, 28000[$	11	$11/42$
$[19000, 20000[$	4	$4/42$			

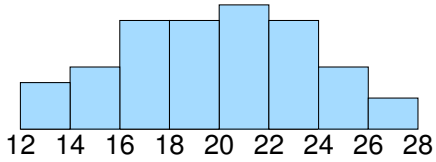
Diagramme en colonnes :



Exemple de discrétisation (3/3)

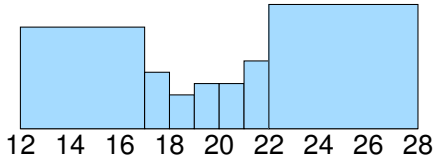
Première discrétisation :

Diagramme en colonnes :



Deuxième discrétisation :

Diagramme en colonnes :



N'utiliser le diagramme en colonnes que pour des discrétisations uniformes

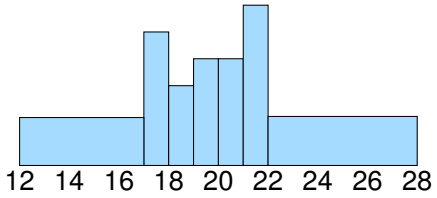
Histogrammes

Définition d'un histogramme

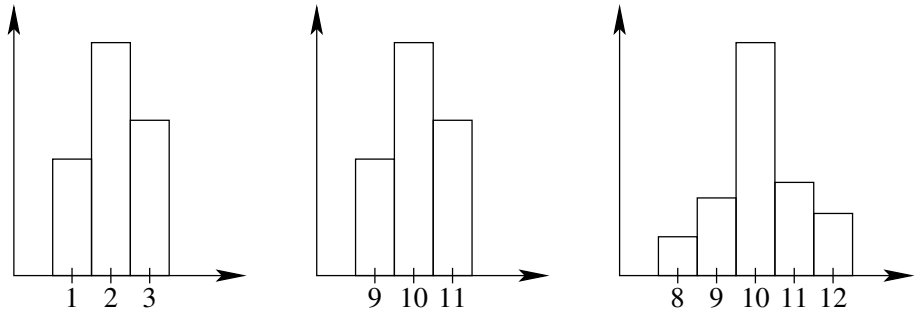
graphe dont l'axe des abscisses représente les modalités et qui associe à chaque classe de modalités un rectangle dont la base correspond aux bornes de cette classe et dont la hauteur est égale à :

$$\text{hauteur} = \frac{\text{fréquence}}{\text{base}}.$$

$\Longrightarrow$ la fréquence d'une classe est égale à la surface de son rectangle



Synthèse d'histogrammes ?



Caractéristiques statistiques :

- localisation sur l'axe des $X \Longrightarrow$ moyenne, médiane, mode
- étendue $\Longrightarrow$ écart-type, variance

La moyenne

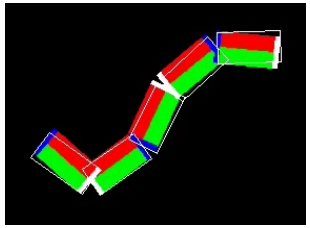
Moyenne d'une variable statistique discrète

- X : variable statistique discrète
- modalités : $\{x_1, x_2, \ldots, x_I\}$
- population de N individus
- Moyenne de X : $\mu_X = \sum_{i=1}^{I} f_i x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{I} N_i x_i$

Moyenne d'une variable statistique continue

- Y : variable statistique continue
- modalités regroupées en I classes de centres $\{y_1, y_2, \ldots, y_I\}$
- population de N individus
- Moyenne de Y : $\mu_Y = \sum_{i=1}^{I} f_i y_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{I} N_i y_i$

Application de la moyenne



Propriétés de la moyenne

Propriété 1

- X : variable statistique
- $Y = aX + b$, où a et b sont des nombres réels
- $\mu_Y = a\mu_X + b$

Propriété 2

- X : variable statistique
- n sous-populations distinctes $S_1, ..., S_n$ de $N_1, ..., N_n$ individus
- μ_i la moyenne de X sur la i$^{\text{ème}}$ sous-population
- μ_X : moyenne de X sur la population $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$

$$\mu_X = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i \mu_i}{\sum_{i=1}^{n} N_i}.$$

Médiane d'une variable statistique discrète

- *moyenne* = valeur centrale des modalités
- *médiane* = valeur de la variable pour laquelle la moitié de la population a une modalité inférieure à cette valeur et l'autre moitié en a une supérieure

Médiane d'une variable statistique discrète

- X : variable statistique discrète, modalités : $\{x_1, \ldots, x_l\}$
- population de N individus
- médiane de X = tout nombre δ tel que :

$$\sum_{i \in \{j : x_j < \delta\}} N_i \leq N/2 \quad et \quad \sum_{i \in \{j : x_j > \delta\}} N_i \leq N/2$$

Exemples

variable statistique X						
modalité	0	1	2	3	4	5
effectif	2	3	4	5	3	2

Données triées
0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5

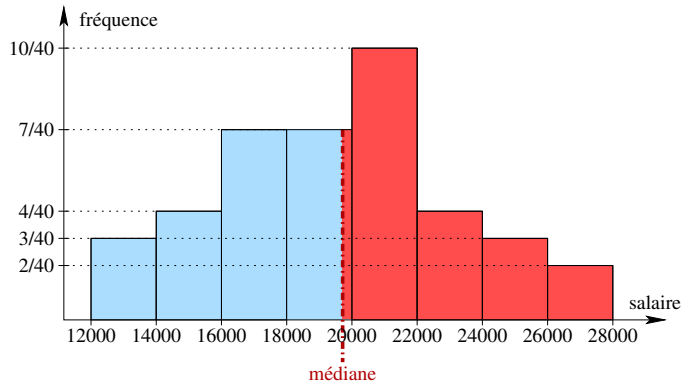
variable statistique X						
modalité	0	1	2	3	4	5
effectif	2	3	4	4	3	2

Données triées
0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5

Médiane d'une variable statistique continue

Médiane d'une variable statistique continue

- X : variable statistique continue
- Médiane = le nombre δ tel que les aires situées de part et d'autre de ce nombre dans l'histogramme représentant X sont égales



Les quantiles

Quantile d'une variable discrète

- X : variable statistique discrète, modalités $\{x_1, \ldots, x_I\}$
- population de N individus
- quantile d'ordre α = tout nombre δ tel que :

$$\sum_{i \in \{j : x_j < \delta\}} N_i \leq \alpha N \quad \text{et} \quad \sum_{i \in \{j : x_j > \delta\}} N_i \leq (1-\alpha) N$$

Quantile d'une variable continue

- X : variable statistique continue
- quantile d'ordre α = le nombre δ tel que les aires situées de part et d'autre de ce nombre dans l'histogramme représentant X sont égales respectivement à $\alpha \times$ aire totale et $(1-\alpha) \times$ aire totale

Principaux quantiles

Principaux quantiles	
valeur de α	nom du quantile d'ordre α
$1/2$	médiane
$i/4$ $(i = 1, 2, 3)$	$i^{\text{ème}}$ quartile
$i/5$ $(i = 1, 2, 3, 4)$	$i^{\text{ème}}$ quintile
$i/10$ $(i = 1, 2, \ldots, 9)$	$i^{\text{ème}}$ décile
$i/100$ $(i = 1, \ldots, 99)$	$i^{\text{ème}}$ centile

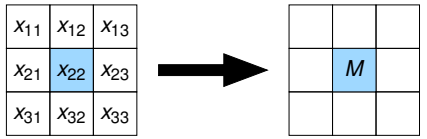
Propriété des quantiles

Propriété

- X : variable statistique
- $Y = aX + b$, où a et b sont des nombres réels
- médiane$(Y) = a \times$ médiane$(X) + b$

Application de la médiane

Filtre médian :



M = médiane des x_{ij}

Étendue des données

Étendue d'une variable discrète

- X : variable statistique discrète
- Étendue de X = la différence entre la plus grande modalité de X et la plus petite modalité

Étendue d'une variable continue

- X : variable statistique continue
- Étendue de X = la différence entre la borne supérieure de la classe associée à la plus grande valeur observée et la borne inférieure de la classe associée à la plus petite valeur observée

⚠ Mesure de dispersion peu utilisée

Variance (1/2)

Idée force : analyser globalement les déviations entre les valeurs prises sur un individu et la moyenne de la population

Variance d'une variable discrète

- X : variable statistique discrète, modalités : $x_1, \ldots, x_I$
- population : N individus
- Variance de X : $\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{I} f_i (x_i - \mu_X)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{I} N_i (x_i - \mu_X)^2$

Variance d'une variable continue

- Y : variable statistique continue
- modalités : I classes de centres $\{y_1, y_2, \ldots, y_I\}$
- population : N individus
- Variance de Y : $\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{I} f_i (y_i - \mu_Y)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{I} N_i (y_i - \mu_Y)^2$

Variance (2/2)

Calcul pratique de la variance

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{I} N_i (x_i - \mu_X)^2$$

$$= \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{I} N_i x_i^2 \right) - \mu_X^2$$

Propriété

- X : variable statistique
- $Y = aX + b$, où a et b sont des nombres réels
- $\sigma_Y^2 = a^2 \sigma_X^2$

Écart-type

Problème de la variance : unités différentes des données

X exprimé en € $\Longrightarrow$ σ_X^2 exprimé en €^{2}

Écart-type

- X : variable statistique (discrète ou continue)
- Écart-type de X : σ_X, la racine carrée de la variance de X

Propriété

- X : variable statistique
- $Y = aX + b$, où a et b sont des nombres réels
- $\sigma_Y = |a| \sigma_X$

Propriété de l'écart-type

Théorème de Bienaymé-Tchébicheff

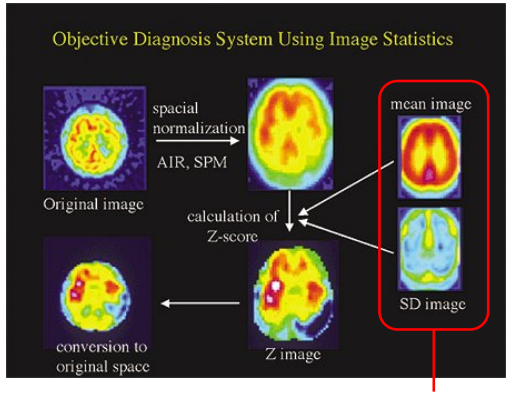
- X une variable statistique discrète
- moyenne μ_X et écart-type σ_X
- la proportion de valeurs de X observées entre $\mu_X - k\sigma_X$ et $\mu_X + k\sigma_X$ est strictement supérieure à $1 - 1/k^2$

- Propriété valable pour les variables statistiques continues :

la proportion d'individus pour lesquels la valeur de X se situe entre $\mu_X - k\sigma_X$ et $\mu_X + k\sigma_X$ est strictement supérieure à $1 - 1/k^2$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{plus de 88\% de la population entre } \mu_X - 3\sigma_X \text{ et } \mu_X + 3\sigma_X \\ \text{plus de 96\% de la population entre } \mu_X - 5\sigma_X \text{ et } \mu_X + 5\sigma_X \end{cases}$$

Application de l'écart-type



base de 1200 patients

1. normaliser l'image du cerveau du patient (SPM : Statistical Parametric Mapping)
2. comparer avec la base de patients
3. produire l'image comparée
4. diagnostiquer la maladie