Module Algo2 – Licence d'Informatique
Énoncés de TD

année 1998–1999

Christophe Gonzales

Travaux dirigés n°1

Exercice 1 (représentation des réels)

Ecrire la représentation de $X = 0.1$ et de $Y = 1.1$ dans la norme IEEE (1985) (sur 32 bits).

Exercice 2 (représentation des réels)

Soit un réel strictement positif X en virgule flottante normalisée $X = M \times 2^E$ sur 32 bits, $1 \leq M < 2$. Calculer le prédécesseur X^- et le successeur X^+ de X en fonction de la mantisse normalisée M et de l'exposant E.

Exercice 3 (problèmes de précision)

Q 3.1 trouver le plus petit entier k tel que $1 + 2^k = 1$.

Q 3.2 pour tout entier positif k, on pose $u_k = 2^{-24}$. Calculer dans la norme IEEE (85) les sommes :

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 + \left(\sum_{k=1}^{2^{24}} u_k \right) = 1 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{2^{24}}, \\ S_2 &= \left(\sum_{k=1}^{2^{24}} u_k \right) + 1 = (u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{2^{24}}) + 1. \end{aligned}$$

Exercice 4 (problèmes de précision)

Soient $X > 0$, $Y > 0$ et T un réel arbitraire. Mathématiquement, il est évident que $T \times ((Y + X) - X)/Y = T$; cependant, en arithmétique des ordinateurs, cette égalité n'est pas toujours vérifiée. Montrer que, faisant le calcul sur une machine quelconque, pour tout X, il existe des Y tels que $T \times ((Y + X) - X)/Y = 0$ quel que soit T. En généralisant, montrer qu'en faisant les calculs sur une machine quelconque, il existe des entiers k tels que, pour tout $X > 0$, $Y > 0$ et T, $T \times ((Y \times b^k + X) - X)/(Y \times b^k) = 0$.

Exercice 5 (problèmes de précision dans la résolution de systèmes linéaires)

Soient les systèmes linéaires $AX = B$ et $CX = D$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1,0000001 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2,0000001 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Résoudre $AX = B$ sur une machine ayant une précision de 7 chiffres, puis de 8 chiffres, en utilisant la méthode de Gauss :

$$\text{Si } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ alors } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - b_1\frac{a_{21}}{a_{11}} \end{pmatrix}.$$

Résoudre $CX = D$ sur une machine ayant une précision à 7 chiffres 1) en effectuant d'abord le produit $a_{12}a_{21}$ puis la division par a_{11} ; 2) en effectuant d'abord la division puis le produit.

Exercice 6 (problèmes de précision dans la résolution d'équations du second degré)

On sait que l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ admet, lorsque $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac > 0$, deux racines distinctes définies par :

$$(1)\quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (2)\quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (3)\quad x_2 = \frac{c}{ax_1}$$

Calculer sur une machine ayant une précision à 15 chiffres les valeurs de x_1 et de x_2 pour l'équation $10^{-8}x^2 - 0.8x + 10^{-8} = 0$ en utilisant respectivement les formules (1) et (2), puis (1) et (3).

Travaux dirigés n°2

Exercice 1 (Résolution de système linéaire et inversion de matrice)

Soit le système linéaire $AX = B$ où

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -7 \\ 9 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -14 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Q 1.1 Résoudre ce système par la méthode de Gauss, d'abord sans recherche de pivot maximum, puis avec recherche.

Q 1.2 Inverser la matrice A par la méthode de Gauss-Jordan.

Exercice 2 (Spline cubique naturelle uniforme)

Dans la plupart des éditeurs graphiques, il existe une fonction permettant de tracer une courbe à partir de la donnée d'un ensemble de $m + 1$ points P_i de coordonnées (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, m$. L'idée des splines naturelles uniformes est de traiter séparément les abscisses et les ordonnées, et de créer ainsi une courbe pour les abscisses et une pour les ordonnées. L'agrégation de ces deux courbes nous fournit la courbe recherchée. Pour obtenir des calculs "simples", ces courbes sont elles-même découpées en ensembles de morceaux de courbes paramétrés $X_i(u)$ et $Y_i(u)$, $i = 0, \ldots, m - 1$, telles que lorsque u varie de 0 à 1, $X_i(u)$ varie de x_i à x_{i+1}. Ainsi, dans l'exemple de la figure 1, la courbe recherchée se trouve en haut à gauche.

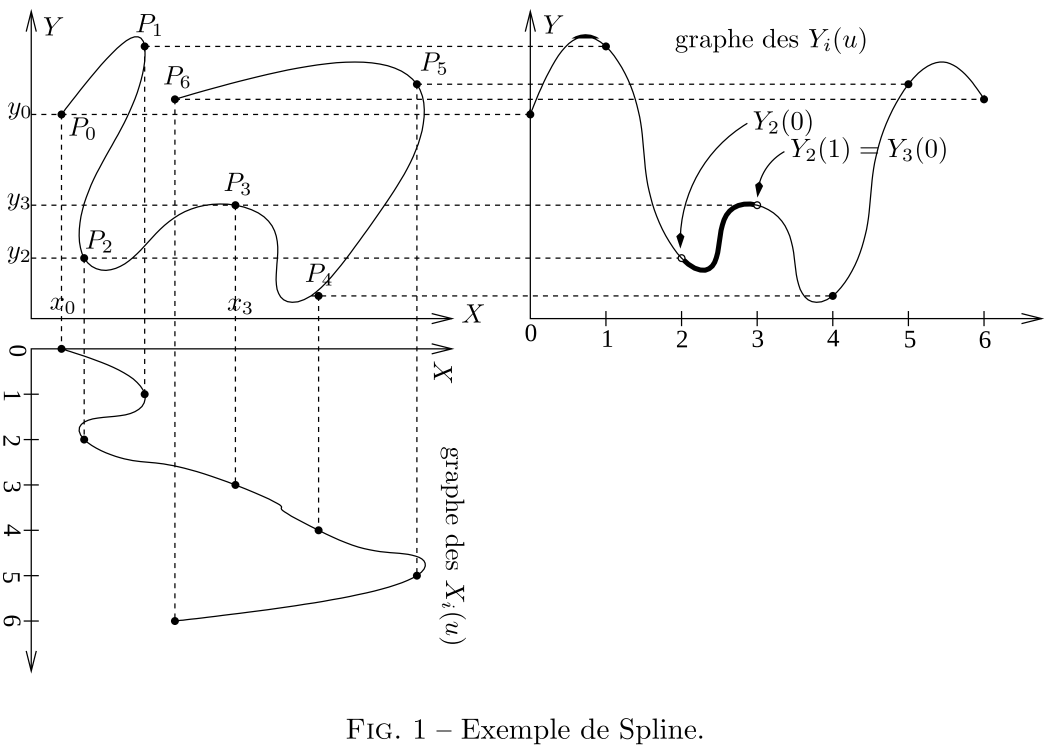


FIG. 1 – Exemple de Spline.

Elle est définie de la manière suivante :

courbe entre P_0 et P_1	$(X_0(u), Y_0(u)),\ u \in [0,1]$
courbe entre P_1 et P_2	$(X_1(u), Y_1(u)),\ u \in [0,1]$
courbe entre P_2 et P_3	$(X_2(u), Y_2(u)),\ u \in [0,1]$
courbe entre P_3 et P_4	$(X_3(u), Y_3(u)),\ u \in [0,1]$
courbe entre P_4 et P_5	$(X_4(u), Y_4(u)),\ u \in [0,1]$
courbe entre P_5 et P_6	$(X_5(u), Y_5(u)),\ u \in [0,1]$

Pour que les calculs ne soient pas trop coûteux (en temps), on se limite en principe à des courbes $X_i(u)$ et $Y_i(u)$ polynômiales de degré 3 en u, c'est-à-dire :

$$X_i(u) = a_i + b_i u + c_i u^2 + d_i u^3 \qquad Y_i(u) = e_i + f_i u + g_i u^2 + h_i u^3.$$

Le problème consiste à déterminer les bonnes valeurs de a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i, h_i, pour obtenir une courbe interpolant les points P_i.

Q 2.1 On veut que la courbe finale soit continue. On impose donc que les $X_i(1)$ (resp. $Y_i(1)$) se raccordent exactement aux $X_{i+1}(0)$ (resp. $Y_{i+1}(0)$). De plus on veut que la courbe finale ait un aspect lissé. Pour cela, on impose que la dérivée en u de $X_i(u)$ (resp. $Y_i(u)$) en $u = 1$ soit égale à celle de $X_{i+1}(u)$ (resp. $Y_{i+1}(u)$) en $u = 0$. Quelles équations obtient-on ?

Posons $D_i = \frac{dX_i(u)}{du}|_{u=0}$ pour tout $i \in \{0, \dots, m-1\}$. Ecrire les valeurs de a_i, b_i, c_i et d_i en fonction des x_j et des D_j, $j = 0, \dots, m$.

Q 2.2 Si l'on suppose de plus que la dérivée seconde de $X_i(\cdot)$ en 1 coincide avec celle de $X_{i+1}(\cdot)$ en 0, et que les dérivées secondes de $X_0(\cdot)$ en 0 et de $X_{m-1}(\cdot)$ en 1 sont égales à 0, alors on montre que les D_i sont solution du système suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D_{m-1} \\ D_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(x_1 - x_0) \\ 3(x_2 - x_0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 3(x_m - x_{m-2}) \\ 3(x_m - x_{m-1}) \end{pmatrix}.$$

Calculer les équations définissant la spline interpolant les points $P_0 = (1,0)$, $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (1,2)$, $P_3 = (2,1)$.

Exercice 3

Une entreprise décide de faire de la publicité à la radio pour vanter un de ses produits. Elle dispose pour cela d'un budget de 500000 francs. La radio propose 2 créneaux horaires pour ses spots publicitaires : 18h et 20h. Les tarifs (en francs/10 secondes) varient suivant le créneau :

créneau	18h	20h
tarif	40000f	60000f

De plus, suivant le créneau, les spots publicitaires touchent différentes couches de la population. Le tableau ci-dessous, déterminé d'après une enquête statistique, montre le nombre de personnes touchées par les spots (en milliers/10 secondes de spot) en fonction du créneau horaire :

	18h	20h
-25 ans	4	3
+25 ans	3	5

Une étude marketing a montré que le produit en question devrait s'adresser pour 40% aux moins de 25 ans et pour 60% aux plus de 25 ans. Quelles doivent être les durées des spots dans chacun des créneaux horaires pour optimiser les ventes du produit.

Travaux dirigés n°3

Exercice 1

Dans la résolution d'un système linéaire $AX = B$ par des méthodes itératives, on cherche d'abord à écrire ce système sous la forme :

$$X = UX + V,$$

où A et U sont des matrices d'ordre n, et B et V sont des vecteurs de dimension n ; et on étudie la suite récurrente définie par :

$$X_{k+1} = UX_k + V, \ X_0 \text{ étant donné.}$$

On suppose que le système $AX = B$ admet une solution unique ω.

Q 1.1 Montrer que pour tout entier positif k, $X_{k+1} - \omega = U(X_k - \omega)$, et, par récurrence, que $X_k - \omega = U^k(X_0 - \omega)$.

Q 1.2 Soit λ une valeur propre de U et W un vecteur propre associé. En initialisant la méthode par le vecteur $X_0 = W + \omega$, montrer que $X_k - \omega = U^k W = \lambda^k W$, et, par conséquent, que $||X_k - \omega|| = |\lambda|^k \times ||X_0 - \omega|| = |\lambda|^k \times ||W||$.

Q 1.3 En déduire que si $|\lambda| \geq 1$, la suite X_k diverge et si $|\lambda| < 1$ la suite X_k converge vers ω.

Q 1.4 Plus généralement, on suppose qu'il existe une base formée par des vecteurs propres de U : W_i, $i = 1, \ldots, n$. Soit λ_i la valeur propre associée au vecteur propre W_i et soit

$$X_0 - \omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i$$

La décomposition de X_0 dans cette base. Montrer alors la relation :

$$X_k - \omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U^k W_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k W_i.$$

Déduire de cette relation des conditions sur X_0 (nécessaires et suffisantes) pour la convergence (ou la divergence) de la suite X_k.

Exercice 2

On suppose que le système linéaire est donné sous la forme $X = UX + V$, avec :

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1/4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad V = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Q 2.1 Calculer la solution ω de ce système par pivot de Gauss, puis calculer X_1, X_2, X_3, solutions de $X_{k+1} = UX_k + V$, en partant du point $X_0 = (\frac{26}{5}, \frac{-2}{5})$.

Q 2.2 Calculer les valeurs propres de U et les vecteurs propres associés.

Q 2.3 En se basant sur l'exercice précédent, caractériser les X_0, $X_0 \neq \omega$, tels que la suite définie par $X_{k+1} = UX_k + V$ soit convergente (ou divergente).

Exercice 3

Dans cet exercice, on suppose que A est une matrice régulière d'ordre 2 et :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ avec } a > 0,\ b > 0,\ c > 0 \text{ et } d > 0.$$

Q 3.1 On applique d'abord la méthode de Jacobi à la résolution du système $AX = B$. Déterminer la matrice associée U. Calculer les valeurs propres et le rayon spectral r_1 de U. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode converge quel que soit le vecteur X_0.

Q 3.2 On applique maintenant la méthode de Gauss-Seidel à la résolution du même système $AX = B$. Déterminer la matrice associée U. Calculer les valeurs propres et le rayon spectral r_2 de U. Montrer que, quels que soient $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ et $d > 0$, il existe $X_0 \neq \omega$ (ω étant la solution du système $AX = B$) tel que la suite X_k converge. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode converge quel que soit le vecteur initial X_0. Comparer ce résultat avec celui obtenu dans la question précédente avec la méthode de Jacobi. Que peut-on dire de la vitesse de convergence des deux méthodes ?

Travaux dirigés n°4

Exercice 1

Soit le programme linéaire suivant :
Maximiser $3x_1 + 2x_2$
Sous contraintes :

$$\begin{cases} x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 4 \\ 7x_1 + 8x_2 \geq 28 \\ 8x_1 - 3x_2 \leq 24 \\ 8x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 52 \\ 2x_1 + 10x_2 \leq 41 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Q 1.1 mettre le programme ci-dessus sous forme standard.

Q 1.2 déterminer géométriquement la solution du programme.

Q 1.3 déterminer la base réalisable correspondante.

Exercice 2

Un vendeur d'ordinateurs propose les produits décrits dans le tableau ci-dessous.

matériel	volume (en cm^3)	prix (en francs)
unité centrale	$30 \times 50 \times 40$	8000
moniteur	$50 \times 50 \times 40$	2000
imprimante	$50 \times 50 \times 30$	1500
cartes (mère, son,...)	$20 \times 30 \times 10$	4000

Un de ses points de vente est actuellement en plein essor. Le vendeur décide donc de lui faire parvenir un container de $90m^3$ de marchandises. Son problème est de déterminer quels produits il doit mettre dans le container. Il sait que s'il veut vendre tout son matériel, il ne doit pas envoyer plus de deux fois plus d'unités centrales que de moniteurs. de même, il doit avoir au moins 20 fois plus d'unités centrales que de cartes. De plus, étant en manque d'imprimantes, il faut que celles-ci occupent au moins 15% du volume du container.
D'après ses statistiques, lors du transport de marchandises, en moyenne 2% des moniteurs, 1% des unités centrales et 5% des cartes sont endommagés et sont remboursés par l'assurance à la moitiée de leur prix. Déterminer le programme linéaire qui permet de trouver la composition du container pour que celui-ci ait la plus grande valeur possible.

Exercice 3

Il existe trois types de Scotch whisky : les "Malt", qui ne contiennent que de l'orge, les "Grain", qui sont produits à partir de plusieurs céréales, et les "Blend", qui sont une combinaison de Malt et de Grain whisky.

Les Blend sont avantageux économiquement par rapport aux Malt car la fabrication du Grain whisky est moins onéreuse que celle des Malt, et le mélange des deux permet d'obtenir des breuvages de meilleure qualité que les Grain. En principe, pour faire un blend, on mélange entre quinze et cinquante Malt différents et trois ou quatre Grain. En ce qui nous concerne, nous ne mélangerons que les 4 Malt et les 2 Grain du tableau ci-dessous :

Whisky	intensité	sensation	goût	prix
Laphroaig	fort	frais	tourbe	150
Bunnahabhain	moyen	frais	sucré	125
Ardberg	piquant	épais	salé	112
Glenfiddich	doux	sec	sucré	135
Grain I	moyen	frais	amer	55
Grain II	doux	sec	sucré	93

Le problème consiste à doser correctement les différents whiskies, de manière à ce que les qualités subtiles des différents Malt ne disparaissent pas, et que le prix de revient soit le meilleur possible. Ecrire le problème qui détermine les proportions des différents whiskies pour obtenir un blend moyen, épais, à mi chemin entre sucré et tourbé, et qui soit au meilleur prix de revient. On conviendra qu'un blend qui se respecte contient au moins 70% de Malt. De plus, on supposera que l'intensité, la sensation et le goût peuvent être représentés par les échelles numériques suivantes :

Intensité :	doux = 1	moyen = 2	piquant = 3	fort = 4
Sensation :	frais = 1	épais = 2	sec = 3	
Goût :	salé = 1	amer = 2	sucré = 3	tourbé = 4

et que l'on peut effectuer des opérations arithmétiques sur ces échelles : par exemple, mélanger 1 unité d'un whisky d'intensité 2 avec 1 unité d'un whisky d'intensité 3 donne 2 unités d'un whisky d'intensité 2,5. En outre, comme l'évaluation des whiskies est assez subjective, on admettra que les échelles données ci-dessus ont une tolérance de 0,3 ; autrement dit, tous les whiskies d'intensité comprises entre 1,7 et 2,3 sont moyens.

Travaux dirigés n°7

Exercice 1 (formules de passage primal/dual)

En utilisant la formule suivante de passage d'un programme linéaire primal à un programme dual :

Primal	Dual
$\min c^T x$	$\max \pi^T b$
$a_i^T x \geq b_i$	$\pi_i \geq 0$
$x_j \geq 0$	$\pi^T A_j \leq c_j$

déterminez le dual du programme primal suivant :

$$\min x_1 + 10x_2 - 5x_3 + 5x_4$$
$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 \leq 12 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \end{cases}$$

(formules générales de passage primal/dual)

Primal	Dual
$\min c^T x$	$\max \pi^T b$
$a_i^T x = b_i$	$\pi_i \gtrless 0$
$a_i^T x \geq b_i$	$\pi_i \geq 0$
$x_j \geq 0$	$\pi^T A_j \leq c_j$
$x_j \gtrless 0$	$\pi^T A_j = c_j$

Exercice 2

Soit le programme linéaire suivant :

$$\max \; -x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 14x_4$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 24 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Q 2.1 Ecrire le programme dual correspondant.

Q 2.2 Vérifier que $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = 4$, est une solution réalisable du dual.

Q 2.3 Sans résoudre le programme linéaire correspondant, montrer que cette solution est en fait la solution optimale du dual. Donner la solution optimale du primal.

Rappel : conditions de complémentarité :
Un couple (x, π) est optimal si et seulement si x et π sont réalisables et vérifient le système d'équations suivant :

$$\pi_i(a_i^T x - b_i) = 0 \quad \text{pour tout } i$$
$$(c_i - \pi^T A_j)x_j = 0 \quad \text{pour tout } j$$

Exercice 3 (Conditions de complémentarité)

On considère le programme linéaire suivant :

$$\min 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4$$
$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 15 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 8 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Q 3.1 Ecrire le dual du programme linéaire ci-dessus.

Q 3.2 Ecrire les conditions de complémentarité qui doivent être satisfaites par toute paire $(\overline{x}, \overline{\pi})$ de solutions optimales respectivement pour le primal $(\overline{x})$ et pour le dual $(\overline{\pi})$.

Q 3.3 Le vecteur $x^* = (1, 0, 6, 0)$ est une solution optimale du problème primal. Ecrire le système d'équations devant être vérifié par le vecteur π^* de variables duales correspondantes. Résoudre ce système pour obtenir π^*.

Interprétation de la dualité :

L'un des premiers problèmes à avoir été résolu grâce à la programmation linéaire est celui de la minimisation de coûts alimentaires (cf. Stigler, G J, "The Cost of Subsistence", J. Farm Econ., **27**, 2 (1945), 303–314) : une ménagère doit acheter de la nourriture et, pour cela, faire son choix parmi n produits différents, eux-même composés de m aliments. Elle désire minimiser le coût de ses achats, tout en ayant un régime équilibré, c'est-à-dire en garantissant qu'elle consommera dans l'année certaines quantités de calcium, magnésium... Supposons que :

a_{ij} = la quantité du $i^{\text{ème}}$ aliment dans 1 unité du $j^{\text{ème}}$ produit, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$,
r_i = la quantité minimale du $i^{\text{ème}}$ aliment à consommer par an, $i = 1, \ldots, m$,
x_j = la quantité du $j^{\text{ème}}$ produit que la ménagère va acheter, $j = 1, \ldots, n$,
c_j = le coût d'une unité du $j^{\text{ème}}$ produit, $j = 1, \ldots, n$.

Alors, trouver les quantités de produits à acheter pour minimiser le coût des achats, tout en garantissant que, quel que soit $i \in \{1, \ldots, m\}$, au moins r_i aliments i seront achetés, revient à résoudre le programme linéaire suivant :

$$\min c^T x$$
$$\begin{cases} Ax \geq r, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Le dual de ce programme est décrit ci-dessous :

$$\max \pi^T r$$
$$\begin{cases} \pi^T A \leq c^T, \\ \pi^T \geq 0. \end{cases}$$

L'interprétation économique du dual est la suivante : une entreprise commercialise chacun des m aliments dont on a besoin pour fabriquer les n produits cités ci-dessus. Connaissant le prix de ces derniers (fixés par les lois du marché), elle recherche à quel prix elle doit fixer l'unité de chacun des m aliments, π_i, pour maximiser son bénéfice. Afin de rester compétitive, le prix du produit final, c_j, ne doit pas être moins élevé que ceux des aliments qui le constituent ; autrement dit,

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_i a_{ij} \leq c_j, \; j = 1, \ldots, n.$$

Evidemment, les prix des aliments doivent être positifs, d'où $\pi^T \geq 0$. Enfin, la fonction objectif, $\pi^T r$, représente le chiffre d'affaires de l'entreprise. Il est remarquable que la dépense minimale de la ménagère (primal) est égal au profit maximal de l'entreprise (dual) : ce sont deux manières d'exprimer le même problème.

Travaux dirigés n°8

Exercice 1

Soit le programme linéaire suivant :

$$\min x_1 - 2x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -2 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Q 1.1 Sans utiliser l'algorithme du simplexe, montrez qu'une solution optimale de ce programme linéaire est obtenue pour $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$. Vérifiez le graphiquement.

Q 1.2 Calculez le programme dual.

Q 1.3 Résolvez le programme dual grâce à l'algorithme du simplexe. Vous préciserez les valeurs des multiplicateurs du simplexe à l'optimum.

Q 1.4 Démontrez que les valeurs de x_1 et x_2 données dans la question 1 sont optimales en utilisant les conditions de complémentarité.

Exercice 2

On considère la matrice G suivante :

$$G = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & g_i^j & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\},$$

associée à un jeu à deux joueurs de la façon suivante :
Les joueurs sélectionnent, <u>à l'insu l'un de l'autre</u>, le premier un indice i (on dit aussi la stratégie i), le deuxième un indice j (la stratégie j). Le premier joueur gagne alors g_i^j francs et le deuxième perd cette même quantité. Par exemple, si le premier joueur joue sa stratégie 1 et le deuxième sa stratégie 3, alors le premier gagne 2 francs et le deuxième en perd 2.
En réalité, les joueurs utilisent des <u>stratégies mixtes</u>, c'est-à-dire qu'ils sélectionnent une stratégie par tirage aléatoire entre leurs 3 stratégies. Une stratégie mixte du joueur 1 est donc caractérisée par un vecteur p de l'ensemble $\mathcal{P} = \{p = (p_1, p_2, p_3) \in [0, 1]^3 | \sum_{i=1}^{3} p_i = 1\}$. Par exemple, si le joueur 1 a une stratégie mixte $(0.45, 0.30, 0.25)$, il optera 45% du temps pour la stratégie 1, il choisira la stratégie 2 30% du temps, et il sélectionnera la stratégie 3 une fois sur 4. De la même manière, une stratégie mixte du joueur 2 est un vecteur q de l'ensemble $\mathcal{Q} = \{q = (q^1, q^2, q^3) \in [0, 1]^3 | \sum_{i=1}^{3} q^i = 1\}$.
Les deux tirages, p et q, sont indépendants l'un de l'autre. Lorsque le joueur 1 choisit la stratégie mixte p, et le deuxième la stratégie mixte q, l'espérance mathématique de gain du premier joueur, c'est-à-dire ce qu'il gagnerait en moyenne si le jeu était répété avec ces mêmes stratégies mixtes un nombre infini de fois, est égale à :

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} p_i q^j g_i^j.$$

Par exemple, si $p = (0.45, 0.30, 0.25)$ et $q = (0, 1, 0)$, le joueur 2 joue toujours la stratégie 2 ; de plus, le joueur 1 joue sa première stratégie 45% du temps, sa deuxième 30% du temps, et sa troisième 25% du temps. Autrement dit, le joueur 1 gagne 45% du temps la somme $g_1^2 = 0$ francs, 30% du temps la somme $g_2^2 = 2$ francs, et 25% du temps la somme $g_3^2 = 2$ francs. Par conséquent, 55% du temps il gagne 2 francs et 45% du temps il en gagne 0. En moyenne il gagne donc $0,55 \times 2 = 1,1$ franc $= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p_i q^j g_i^j$. Notons que cette somme correspond également à ce que perd le deuxième joueur. On suppose que le premier joueur veut maximiser son espérance de gain, c'est-à-dire qu'il recherche sa stratégie p de manière à optimiser ses gains, autrement dit, il cherche p vérifiant :

$$\max_{p \in \mathcal{P}} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p_i q^j g_i^j.$$

On suppose de plus que le but du deuxième joueur est de minimiser ses pertes quelle que soit la stratégie du premier joueur, c'est-à-dire qu'il cherche q minimisant le maximum d'espérance de gain du premier joueur. Il cherche donc q vérifiant :

$$\min_{q \in \mathcal{Q}} \max_{p \in \mathcal{P}} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p_i q^j g_i^j.$$

Q 2.1 Montrez que si, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} q^j g_i^j \leq \lambda$, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p_i q^j g_i^j \leq \lambda$ pour tout $p \in \mathcal{P}$.

Q 2.2 En déduire que $\displaystyle\max_{p \in \mathcal{P}} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p_i q^j g_i^j = \max_{i \in \{1,2,3\}} \sum_{j=1}^{3} q^j g_i^j$.

Q 2.3 En déduire que, pour choisir sa stratégie q, le deuxième joueur doit résoudre le programme linéaire suivant :

$$\min \lambda$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3} g_i^j q^j - \lambda \leq 0, \quad i \in \{1, 2, 3\} \\ \sum_{j=1}^{3} q^j = 1 \\ q^j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Q 2.4 En utilisant la matrice G définie sur la page précédente, trouvez grâce à l'algorithme du simplexe la stratégie mixte que doit employer le joueur 2. Pour obtenir la première base réalisable vous rajouterez une variable artificielle. De plus, pour le premier pivot, vous ferez sortir de la base la troisième variable d'écart et rentrer q^2. Vous déterminerez les multiplicateurs du simplexe à l'optimum.

Q 2.5 Supposons que le joueur 1 essaye de maximiser le minimum possible de son espérance de gain. Autrement dit, le joueur 1 choisit une stratégie mixte satisfaisant $\max_{p \in \mathcal{P}} \min_{q \in \mathcal{Q}} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p_i q^j g_i^j$. Alors, d'une manière similaire aux questions 1 à 3, on montre que ce joueur doit choisir sa stratégie mixte en résolvant le dual du programme linéaire de la question 3/. Appelons v les variables de ce programme. Alors p est précisément égal à $-v$. Déterminez la stratégie mixte optimale du joueur 1.

NB : Ces résulats s'étendent à beaucoup de jeux. Par exemple, le jeu Pierre, Puits, Ciseaux, Feuille, peut être modélisé grâce à la matrice G suivante :

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cccc} \textit{Pierre} & \textit{Puits} & \textit{Ciseaux} & \textit{Feuille} \end{array} \\ \begin{array}{r} \textit{Pierre} \\ \textit{Puits} \\ \textit{Ciseaux} \\ \textit{Feuille} \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Travaux dirigés n°9

Exercice 1 (Application de Ford Fulkerson)

Déterminer à l'aide de l'algorithme de Ford Fulkerson le flot maximal du réseau de la figure 1, où la capacité M est très élevée, par exemple 10^6.

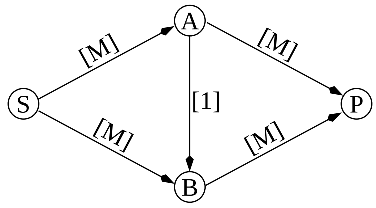


FIG. 1 – Exemple de mauvais comportement de Ford Fulkerson.

Faites de même avec le réseau de la figure 2. Quelle est la coupe minimale correspondante ?

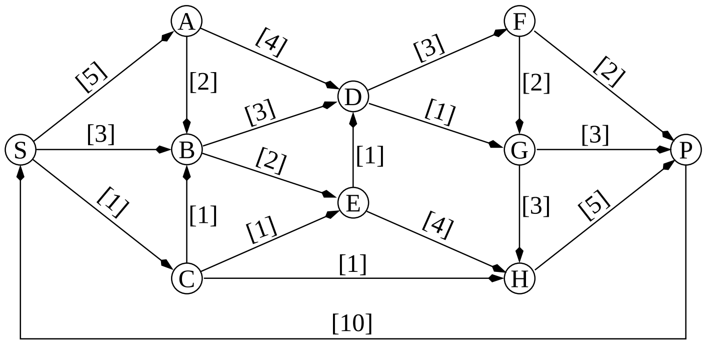


FIG. 2 – Exemple illustrant la détermination d'un chemin améliorant.

Exercice 2 (Application de Ford Fulkerson)

Trois villes J, K, L, sont alimentées en eau grâce à quatre réserves A, B, C, D (nappes souterraines, châteaux d'eau, usines de traitement...). Les réserves journalières disponibles sont de 15 milles m^3 pour A, de 10 pour B, de 15 pour C et de 15 pour D. Le réseau de distribution, comprenant aussi bien des aqueducs romains que des canalisations récentes, peut être schématisé par le graphe de la figure 3 (les débits maximaux sont indiqués (entre crochets) sur chaque arc en milliers de m^3 par jour).
Ces trois villes en pleine évolution désirent améliorer leur réseau d'alimentation afin de satisfaire des besoins futurs plus importants. Une étude a été réalisée et a permis de déterminer les demandes journalières maximales probables, à savoir pour la ville J : 15 milles m^3, pour la ville K : 20 et 15 pour la ville L.

Q 2.1 Déterminer le flot maximal pouvant passer dans le réseau actuel et donner la coupe minimale correspondante.

Q 2.2 La valeur de ce flot est jugée nettement insuffisante, aussi le conseil intercommunal décide-t-il de refaire les canalisations (A,E) et (I,L). Déterminer les capacités à prévoir pour ces deux canalisations et la valeur du nouveau flot optimal.

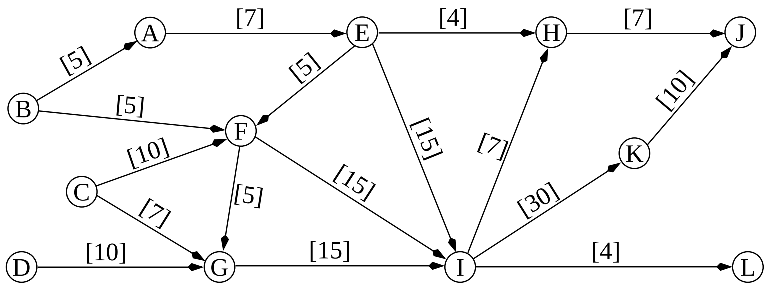


FIG. 3 – Schéma des canalisations.

Q 2.3 Devant l'importance des travaux, le conseil intercommunal décide de ne pas refaire les deux canalisations en même temps. Dans quel ordre doit-on entreprendre leur réfection de façon à augmenter, après chaque tranche de travaux, la valeur du flot optimal passant dans le réseau ?

Exercice 3 (Couplage parfait)

Etant donné un graphe non orienté $G = (S, A)$, un couplage est un sous-ensemble d'arêtes $M \subseteq A$ tel que pour tous les sommets $v \in S$, au plus une arête de M soit incidente à v. On dit qu'un sommet $v \in S$ est couvert par le couplage M si une arête de M est incidente à v. Un couplage maximal est un couplage M tel que pour un couplage M' quelconque, on ait $\mathrm{Card}(M') \geq \mathrm{Card}(M)$.

Q 3.1 Montrer qu'il y a bijection entre couplage maximal d'un graphe biparti et flot maximal d'un réseau que l'on construira.

Q 3.2 Soit $G = (S, A)$ un graphe biparti non orienté de partition de sommets $S = L \cup R$, où $\mathrm{Card}(L) = \mathrm{Card}(R)$. Pour un $X \subseteq S$ quelconque, on définit le voisinage de X par :

$$V(X) = \{y \in S : (x, y) \in A \text{ pour un certain } x \in X\}.$$

Un couplage parfait est un couplage couvrant tous les sommets de S. Démontrer le théorème de Hall : il existe un couplage parfait dans G si et seulement si $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(V(E))$ pour tout sous-ensemble $E \subseteq L$.

Exercice 4 (Problème de l'excursion des familles)

Soient 4 familles f_1, f_2, f_3, f_4 comportant respectivement 4, 5, 5 et 5 membres. Ces familles décident de faire une excursion et, pour cela, elles ont à leur disposition 5 voitures ayant respectivement 4, 3, 6, 5 et 4 places. Les familles souhaitent se répartir dans les voitures de façon à ce que deux membres d'une même famille ne se trouvent jamais dans une même voiture.

Q 4.1 Déterminer une telle répartition.

Q 4.2 Il se rajoute une famille de 3 personnes souhaitant participer à l'excursion. Le problème a-t-il encore une solution ?

Travaux dirigés n°10

Automates

Dans tout ce TD, A désigne un alphabet ; A^* représente l'ensemble des mots sur A. X, X', Y sont des langages (formels) sur A, c'est-à-dire des parties de A^*.

Exercice 1 (Déterminisation d'un automate fini)

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, considérons les automates finis non déterministes ci-dessous.

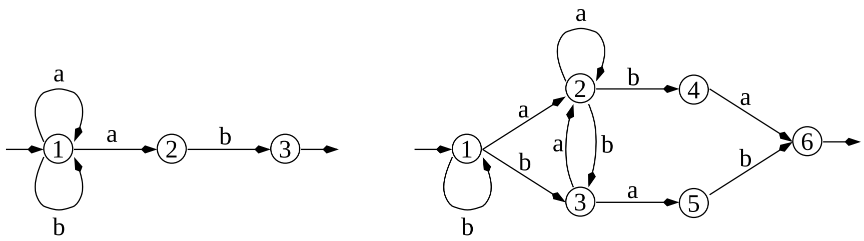


FIG. 1 – Automates finis.

Construire des automates finis déterministes correspondant.

Exercice 2 (Opérations booléennes sur les automates)

Soient X et X' deux langages reconnaissables de A^*, et $\mathcal{A} = (Q, i, T)$ et $\mathcal{A}' = (Q', i', T')$ deux automates finis déterministes complets tels que $X = L(\mathcal{A})$ et $X' = L(\mathcal{A}')$, autrement dit, tels que X et X' sont les langages reconnus respectivement par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$. Considérons l'automate déterministe complet

$$\mathcal{B} = (Q \times Q', (i, i'), S),$$

dont la fonction de transition est définie par

$$(p, p') \cdot a = (p \cdot a, p' \cdot a)$$

pour tout couple d'états (p, p') et toute lettre $a \in A$.

Q 2.1 Montrer que pour $S = T \times T'$, $L(\mathcal{B})$ est égal à $X \cap X'$ (intersection).

Q 2.2 Considérons les automates de la figure 2, qui reconnaissent respectivement les langages : $b^*a(a^2)^*ba^*b^*(b * a(a^2)^*ba^*)^*$ et $(((a \cup b^2)a^*b) \cup ba)\{a, b\}^*$.
Sachant que si $S = (T \times Q') \cup (Q \times T')$, $L(\mathcal{B}) = X \cup X'$ (union) et que si $S = T \times (Q' - T')$, $L(\mathcal{B}) = X - X'$, déterminer des automates reconnaissant les langages $X \cup X'$ et $X - X'$, où X et X' sont donnés respectivement par les automates de la figure 2.
Rappel : Soit A un alphabet. Les opérations rationnelles sur les parties de A^* sont les opérations suivantes :

union $X \cup Y$;

produit $XY = \{xy | x \in X,\ y \in Y\}$;

étoile $X^* = \bigcup_{n \geq 0} X^n$.

Une famille de parties de A^* est *rationnellement fermée* si elle est fermée pour les trois opérations rationnelles. Les *langages rationnels* de A^* sont les éléments de la plus petite famille rationnellement

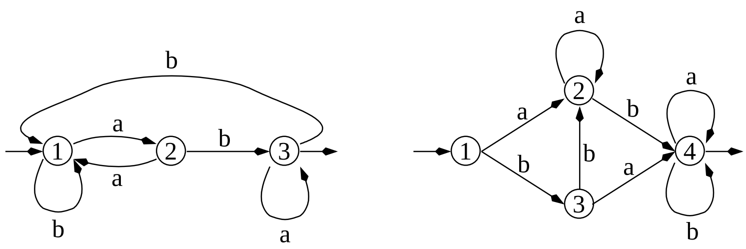


FIG. 2 – Intersection et complémentation des automates finis.

fermée de A^* qui contient le langage vide et les singletons (c'est-à-dire les langages réduits à un seul mot). Une expression d'un langage comme combinaison finie d'unions, de produits et d'étoiles de singletons est une *expression rationnelle*.
Théorème de Kleene : Soit A un alphabet fini. Alors les langages rationnels et les langages reconnaissables sur A coïncident.
Question : Soit $A = \{a, b\}$. Le langage des mots qui contiennent un nombre pair de a est-il rationnel ?

Rappel à propos du calcul de l'automate quotient :

Proposition 1 : *Soit $\mathcal{A}$ un automate. L'équivalence de Nérode est régulière à droite, c'est-à-dire que pour tout $u \in A^*$, $p \sim q \Rightarrow p.u \sim q.u$.*

Algorithme de détermination de l'automate quotient :

1 **initialisation :** pour tout couple $(p, q) \in Q \times Q$, $p < q$, $S_{p,q} := 0$.

2 Pour toute paire d'états (p, q) dans $(Q - T) \times (Q - T) \cup T \times T$ avec $p < q$, faire :

pour tout $a \in A$, avec $p.a \neq q.a$, on pose $p' = \min(p.a, q.a)$, $q' = max(p.a, q.a)$ et on rajoute l'arc $((p', q'), (p, q))$ à G.

3 Pour toute paire d'états (p, q) dans $[(Q - T) \times T] \cup [T \times (Q - T)]$ avec $p < q$ faire :

a) $S_{p,q} := 1$.

b) Pour tous les descendants (p', q') de (p, q) dans G faire $S_{p',q'} := 1$.

Proposition 2 : *Pour tout couple d'états (p, q) avec $p < q$, p et q sont séparables si et seulement si $S_{p,q} = 1$.*

Démonstration : 2 Si p et q sont séparables, soit u le mot le plus court qui les sépare. On suppose sans perte de généralité que $p.u \in T$ et que $q.u \notin T$. Montrons par récurrence sur la longueur de u que $S_{p,q} = 1$.

(B) Si $|u| = 0$ alors $u = \epsilon$, i.e., le mot vide, donc $p \in T$ et $q \notin T$. Donc $S_{p,q} = 1$.

(R) Si la propriété est vérifiée pour les valeurs strictement inférieures à n, on suppose que $|u| = n$. Comme $|u| \geq 1$, il existe $a \in A^*$ et v de longueur $n - 1$ tels que $u = av$. Forcément $p.a \neq q.a$, donc on a défini un arc $((p', q'), (p, q))$ dans G avec $p' = \min(p.a, q.a)$ et $q' = \max(p.a, q.a)$. Ainsi, par contraposée de la proposition 1, p' et q' sont séparables, et le mot le plus court qui les sépare est de taille inférieur à $n - 1$. Par récurrence, $S_{p',q'} = 1$ et donc $S_{p,q} = 1$.

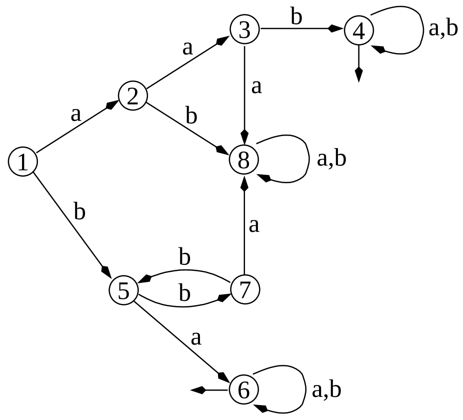
Réciproquement, si $S_{p,q} = 1$ alors il existe un chemin μ dans G d'un sommet formé de deux états séparables (p', q') à (p, q). Montrons par récurrence sur la longueur de μ que p et q sont séparables.

(B) Si $|\mu| = 0$ alors $(p, q) = (p', q')$. Donc p et q sont séparables.

(R) Si la propriété est vérifiée pour les valeurs strictement inférieures à n, on suppose que $|\mu| = n$. Soit (p'', q'') le prédécesseur immédiat de (p, q) sur $|\mu|$. Alors $S_{p'',q''} = 1$ et p'' et q'' sont séparables par récurrence. De plus, il existe $a \in A$ tel que $p'' = \min(p.a, q.a)$ et $q' = \max(p.a, q.a)$. Donc p et q sont séparables par contraposée de la proposition 1.

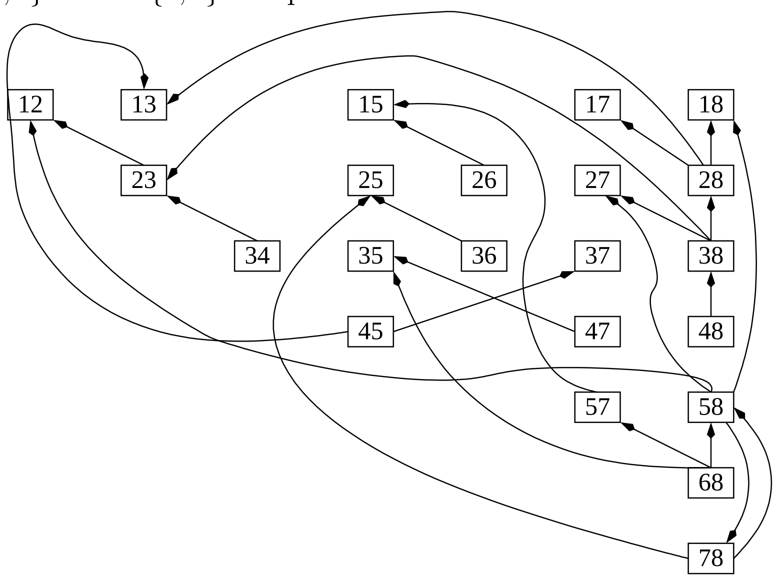
♦

Exemple : Déterminons l'automate quotient correspondant à l'automate suivant :



Première méthode : en utilisant l'algorithme ci-dessus

$Q - T = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ et $T = \{4, 6\}$. Graphe G :



2	3	4	5	6	7	8	
1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	2
		1	1	1	1	1	3
			1	0	1	1	4
				1	1	1	5
					1	1	6
						1	8

$\Rightarrow$ seuls les états 4 et 6 doivent être aggrégés.

Deuxième méthode :

$L_6(\mathcal{A}) = \{a,b\}^*$

$L_4(\mathcal{A}) = \{a,b\}^*$

$L_8(\mathcal{A}) = \emptyset$

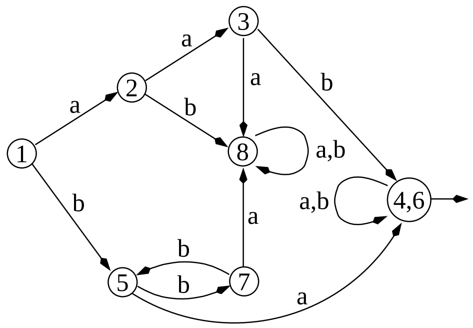
$L_3(\mathcal{A}) = bL_4(\mathcal{A}) \cup aL_8(\mathcal{A}) = b\{a,b\}^*$

$L_2(\mathcal{A}) = aL_3(\mathcal{A}) \cup bL_8(\mathcal{A}) = ab\{a,b\}^*$

$L_5(\mathcal{A}) = bL_7(\mathcal{A}) \cup aL_6(\mathcal{A}) = bL_7(\mathcal{A}) \cup a\{a,b\}^*$

$$\begin{aligned} L_7(\mathcal{A}) &= aL_8(\mathcal{A}) \cup bL_5(\mathcal{A}) = bL_5(\mathcal{A}) \\ &= b^2L_7(\mathcal{A}) \cup ba\{a,b\}^* = (b^2)^*ba\{a,b\}^* \\ L_5(\mathcal{A}) &= bL_7(\mathcal{A}) \cup a\{a,b\}^* = b(b^2)^*ba\{a,b\}^* \cup a\{a,b\}^* \\ &= (b^2)^+a\{a,b\}^* \cup a\{a,b\}^* = (b^2)^*a\{a,b\}^* \\ L_1(\mathcal{A}) &= aL_2(\mathcal{A}) \cup bL_5(\mathcal{A}) = a^2b\{a,b\}^* \cup b(b^2)^*a\{a,b\}^* \\ &= (a^2b \cup b(b^2)^*a)\{a,b\}^* \end{aligned}$$

En regroupant les états à partir desquels le langage reconnu est identique, on obtient l'automate quotient suivant :



Exercice 3 (Automate quotient)

Quels sont les automates quotients correspondant aux automates finis déterministes complets de la figure 3 ?

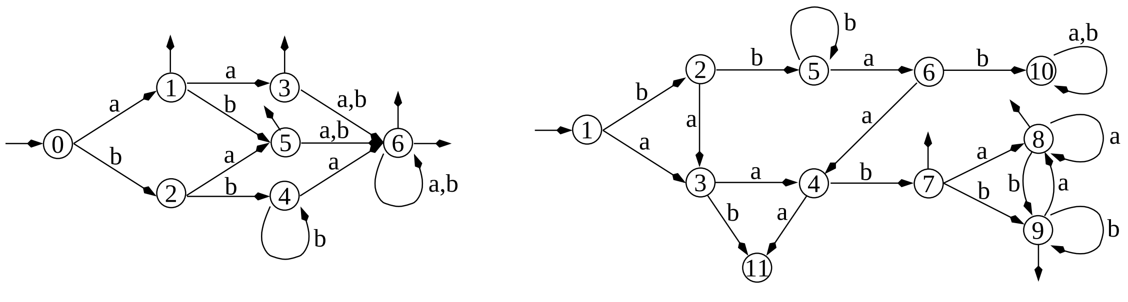


FIG. 3 – Automates quotients.

Exercice 4 (Automate des occurences)

Déterminer l'automate des occurences pour les motifs $x_1 = ababacacab$ et $x_2 = ababab$.

Travaux dirigés n°11

Dans ce qui suit, m représente la longueur du motif x à rechercher et n la longueur du texte t.

Algorithme de Morris-Pratt

Proposition 1 : *Soit x un mot non vide. Appelons* $\mathrm{Bord}(x)$ *le bord maximal de x. Notons* $\mathrm{Bord}^2(x) = \mathrm{Bord}(\mathrm{Bord}(x))$ *et, par récurrence,* $\mathrm{Bord}^k(x) = \mathrm{Bord}(\cdots(\mathrm{Bord}(x)))$*. Soit k le plus petit entier tel que* $\mathrm{Bord}^k(x) = \epsilon$*.*

(1) Les bords de x sont les mots $\mathrm{Bord}(x), \mathrm{Bord}^2(x), \ldots, B^k(x)$*.*

(2) Soit a une lettre. Alors $\mathrm{Bord}(xa)$ *est le plus long préfixe de x qui est dans l'ensemble* $\{\mathrm{Bord}(x)a, \mathrm{Bord}^2(x)a, \ldots, B^k(x)a, \epsilon\}$*.*

Corollaire 1 : *Soit x un mot non vide et soit a une lettre. Alors :*

$$\mathrm{Bord}(xa) = \begin{cases} \mathrm{Bord}(x)a & \textit{si } \mathrm{Bord}(x)a \textit{ est préfixe de } x, \\ \mathrm{Bord}(\mathrm{Bord}(x)a) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit les algorithmes suivants pour déterminer la fonction β et la fonction de suppléance :

```
procédure Bords-maximaux(x, β) ;
   β[0] := −1 ;
   pour j variant de 1 à m faire
      i := β[j − 1] ;
      tant que i ≥ 0 et x[j] ≠ x[i + 1] faire i := β[i] fintantque ;
      β[j] := i + 1 ;
   finpour.
```

```
procédure Suppléance(x, s) ;
   s[1] := 0 ;
   pour j variant de 1 à m − 1 faire
      i := s[j] ;
      tant que i > 0 et x[j] ≠ x[i] faire i := s[i] fintantque ;
      s[j + 1] := i + 1 ;
   finpour.
```

Exercice 1 (Détermination des bords maximaux)

A l'aide des procédures ci-dessus, déterminer les fonctions β et s pour les mots $x_1 = ababca$, $x_2 = ababcaba$ et $x_3 = abcabaabcab$.

Exercice 2

Rechercher à l'aide de l'algorithme de Morris-Pratt le motif $x_1 = ababc$ dans le texte $t_2 = bababcababca$. De même, rechercher les mots $x_2 = ababcaba$ et $x_3 = abcabaabcab$ respectivement dans les textes $t_2 = abaccababcabaaca$ et $t_3 = abcabcbababab cabaabcaa$.

Algorithme de Knuth-Morris-Pratt

Exercice 3 (Algorithmes de Morris-Pratt et Knuth-Morris-Pratt)

Appliquer les algorithmes de Morris-Pratt et de Knuth-Morris-Pratt pour rechercher les motifs $x_1 = ababacacab$ et $x_2 = ababab$ respectivement dans les textes :
$t_1 = ababcababadabac$ et $t_2 = abbabaababbababaababab$.

algorithmes pour calculer les fonctions $\gamma(\cdot)$ et $r(\cdot)$ de Knuth-Morris-Pratt :

```
Procédure BORDS-DISJOINTS-MAXIMAUX(x, γ) ;
    γ[0] := −1 ; i := −1 ;
    pour j variant de 1 à m faire
        tantque i ≥ 0 et x[j] ≠ x[i + 1] faire i := γ[i] fintantque ;
        i := i + 1 ;
        si x[1 + j] ≠ x[1 + i] alors γ[j] := i sinon γ[j] := γ[i]
    finpour
```

```
Procédure DEUXIÈME-SUPPLÉANCE(x, r) ;
    r[1] := 0 ; i := 0 ;
    pour j variant de 1 à m − 1 faire
        tantque i > 0 et x[j] ≠ x[i] faire i := r[i] fintantque ;
        i := i + 1 ;
        si x[1 + j] ≠ x[i] alors r[1 + j] := i sinon r[1 + j] := r[i]
    finpour
```

Algorithme de Boyer-Moore

Exercice 4

Il existe plusieurs versions de l'algorithme de Boyer et Moore. Appliquer l'algorithme simplifié pour reconnaître le motif $x_1 = ababab$ dans le texte $t_1 = ababcababadabac$. Appliquer les algorithmes simplifiés et complets pour rechercher le motif $x_2 = abcbbcbbcbbc$ dans le texte $t_2 = abcbbcbacbbccabcbbbcbbcb$.

La procédure suivante a pour but de déterminer la distance d (en nombre de lettres) entre la dernière occurence d'une lettre quelconque et la dernière lettre du motif x. Si la lettre n'apparaît pas dans le motif ou bien si elle n'apparaît qu'en dernière position, cette distance est égale à la longueur m du motif. Par exemple, pour le motif, $x = aababab$, $d(a) = 1$, $d(b) = 2$ et $d(c) = 7$.

```
procédure DERNIÈRE-OCCURENCE (x, d) ;
    pour toute lettre a de A faire d[a] := m finpour
    pour i variant de 1 à m − 1 faire d[x_i] := m − i finpour
```

Après avoir utilisé la procédure DERNIÈRE-OCCURENCE pour calculer la distance d, on peut appliquer l'algorithme de BOYER-MOORE-SIMPLIFIÉ.

```
procédure BOYER-MOORE-SIMPLIFIÉ(x, t) ;
   j := m ;
   tant que j ≤ n faire
      i := m ;
      tant que i > 0 et t_j = x_i faire
         i := i − 1 ; j := j − 1 fintantque
      si i = 0 alors
         fin d'une occurence de x en j ;
      j := j + max(d[t_j], m − i + 1) ;
   fintantque
```

La procédure complète de BOYER-MOORE utilise deux distances : la distance d et une autre d_2. A part cela, elle est pratiquement identique à celle de BOYER-MOORE-SIMPLIFIÉE. La distance d ne prend pas en compte le suffixe où la différence entre le motif et le texte a été constatée. La distance d_2 le fait. Plus précisément, d_2 est définie pour $u = x_{i+1} \cdots x_m$ par :

$$
\begin{aligned}
V(u) &= \{v | v \text{ est suffixe de } x,\ u \text{ est bord disjoint droit de } v\}, \\
W(u) &= \{w | x \text{ est suffixe de } w,\ u \text{ est bord de } w,\ |w| \leq |ux|\}, \\
d_2(i) &= \min_{v \in V(u) \cup W(u)} |v|,
\end{aligned}
$$

un bord disjoint droit d'un suffixe v de x étant un bord u de v tel que les suffixes u et v ne sont pas précédés de la même lettre dans x.

```
procédure BOYER-MOORE(x, t) ;
   j := m ;
   tant que j ≤ n faire
      i := m ;
      tant que i > 0 et t_j = x_i faire
         i := i − 1 ; j := j − 1 fintantque
      si i = 0 alors
         fin d'une occurence de x en j ;
         j := j + d_2[i] ;
      sinon
         j := j + max(d[t_j], d_2[i]) ;
      finsi
   fintantque
```

```
procédure BON-PRÉFIXE(x, δ) ;
   j := m ;
   tant que j > 0 faire
      pour i de β[j] à j − 1 faire δ[i] := m − β[j] + i ;
      j := β[j] ;
   fintantque
   pour j de 1 à m − 1 faire
      i := β[j] ;
      tant que i ≥ 0 et x_{j+1} ≠ x_{i+1} faire
         δ[i] := min(δ[i], j) ; i := β[i] ;
      fintantque
   finpour
```

```
procédure BON-SUFFIXE(x, d2) ;
    pour i de 1 à m faire y_i := x_{m+1-i} ;
    BORDS-MAXIMAUX(y, β) ;
    BON-PREFIXE(y, δ) ;
    d2[0] := m + β[0]
    pour i de 1 à m faire d2[i] := δ[m − i]
```