Maîtrise d'informatique 2 001-02

ALGORITHMIQUE NUMÉRIQUE

Notes de Cours

Jean-Yves JAFFRAY

CHAPITRE

OPTIMISATION

OPTIMISATION

1 OPTIMISATION D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE

1.1 FONCTIONS UNIMODALES

Soit f une fonction à valeurs réelles définie dans un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

On dit que f passe par un *minimum (global* ou *absolu)* en $\hat{x}$ lorsque $x \in [a, b] \Longrightarrow f(x) \geqq f(\hat{x})$; ce minimum est *strict* lorsque $x \neq \hat{x} \Longrightarrow f(x) > f(\hat{x})$;

et on dit que f passe par un *minimum local* en $\hat{x}$ lorsqu'il existe un voisinage Vde $\hat{x}$ tel que $x \in V \Longrightarrow f(x) \geqq f(\hat{x})$; ce minimum local est *strict* lorsque $x \in V \setminus \{\hat{x}\} \Longrightarrow f(x) > f(\hat{x})$.

[Rappelons que dans $\mathbb{R}$ un voisinage V de $\hat{x}$ est un ensemble contenant un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ contenantlui-même x]

Une fonction f est *unimodale* lorsqu'il existe $\hat{x} \in [a, b]$ tel que :

$x^1 < x^2 \leqq \hat{x} \Longrightarrow f(x^1) > f(x^2)$;

$\hat{x} \leqq x^1 < x^2 \Longrightarrow f(x^1) < f(x^2)$.

Une fonction unimodale passe donc par un minimum strict en un point $\hat{x}$ de $[a, b]$

Notons qu'une fonction unimodale peut ne pas être dérivable, ni même continue.

Exemples de fonctions unimodales

Une fonction f est dite *convexe* lorsque

$\forall x, y \in [a, b], \forall \lambda \in [0, 1]\,,\ f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geqq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$

et *strictement convexe* lorsque

$\forall x, y \in [a, b], \forall \lambda \in]0, 1[,\ f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Toute fonction strictement convexe est unimodale. En revanche il existe des fonctions convexes non unimodales et des fonctions unimodales non convexes.

L'intérêt des fonctions unimodales tient à la propriété suivante :

Lemma 1 *Tout minimum local d'une fonction unimodale en est minimum global.*

Ce lemme, de même que le suivant, se démontre facilement (par l'absurde).

Lemma 2 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, unimodale. Soit x^G, x^D tels que $a < x^G < x^D < b$; alors :*

$f(x^G) < f(x^D) \Longrightarrow \hat{x} \in [a, x^D]$
$f(x^G) > f(x^D) \Longrightarrow \hat{x} \in [x^G, b]$
$f(x^G) = f(x^D) \Longrightarrow \hat{x} \in [x^G, x^D]$.

Figure dans le 1er cas

Nous utiliserons cette propriété pour localiser, avec une précision donnée, par une méthode itérative, le minimum d'une fonction unimodale.

Le calcul de la valeur d'une fonction f en un x donné peut être long (il faut par exemple sommer les premiers termes d'une série de somme $f(x)$). La méthode suivante ne demande qu'une évaluation à chaque itération.

1.2 MÉTHODE DE LA SUITE DE FIBONACCI

Rappel : La suite de FIBONACCI est donnée par la formule de récurrence :

$$F_0 = F_1 = 1; \qquad F_{k+2} = F_k + F_{k+1}.$$

Ses premiers termes sont donc : $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,$ *etc...*

Le rapport de deux termes successifs a pour limite le *nombre d'or :*

$\frac{F_{k+1}}{F_k} \to \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618..$, solution positive de l'équation $\tau = 1 + \frac{1}{\tau}$.

Méthode :

On se donne a priori N, nombre total de fois où l'on évaluera f en un point.

Itération k

On applique le lemme précédent à un intervalle $[a_k, b_k]$ avec les points intérieurs x_k^G, x_k^D donnés par :

$$x_k^G = a_k + \frac{F_{N-k}}{F_{N+2-k}}(b_k - a_k); \qquad x_k^D = a_k + \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}(b_k - a_k),$$

qui sont situés symétriquement sur $[a_k, b_k]$,.puisque $x_k^G - a_k = b_k - x_k^D$.

Selon le résultat de la comparaison de $f(x_k^G)$ et $f(x_k^D)$ on sera dans l'un des cas suivants :

cas (i) : $f(x_k^G) < f(x_k^D)$. Comme $\hat{x} \in [a_k, x_k^D]$, on prendra $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_k^D$.

Comme

$x_{k+1}^D = a_{k+1} + \frac{F_{N+1-(k+1)}}{F_{N+2-(k+1)}}(b_{k+1} - a_{k+1}) = a_k + \frac{F_{N-k}}{F_{N+1-k}}(x_k^D - a_k) =$
$a_k + \frac{F_{N-k}}{F_{N+1-k}}.\frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}(b_k - a_k) = a_k + \frac{F_{N-k}}{F_{N+2-k}}(b_k - a_k) = x_k^G,$

seule $f(x_{k+1}^G)$ aura à être évaluée à l'itération suivante.

Notons aussi que

$b_{k+1} - a_{k+1} = x_k^D - a_k = \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}(b_k - a_k)$, d'où $\frac{b_{k+1}-a_{k+1}}{b_k-a_k} = \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}$.

Cas(i)

cas (ii) : $f(x_k^G) > f(x_k^D)$. Comme $\hat{x} \in [x_k^G, b_k]$, on prendra $a_{k+1} = x_k^G$ et $b_{k+1} = b_k$.

Comme $x_{k+1}^G = x_k^D$ (calcul semblable à celui du cas(i)), seule $f(x_{k+1}^D)$ aura à être évaluée. Notons encore que $\frac{b_{k+1}-a_{k+1}}{b_k-a_k} = 1 - \frac{F_{N-k}}{F_{N+2-k}} = \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}$, comme dans le cas (i).

cas (iii) : $f(x_k^G) = f(x_k^D)$. Comme $\hat{x} \in [x_k^G, x_k^D]$, on prendra $a_{k+1} = x_k^G$ et $b_{k+1} = x_k^D$, d'où une réduction

$\frac{b_{k+1}-a_{k+1}}{b_k-a_k} = \frac{F_{N+1-k}-F_{N-k}}{F_{N+2-k}} = \frac{F_{N-1-k}}{F_{N+2-k}} = \frac{F_{N-1-k}}{F_{N-k}}.[\frac{F_{N-k}}{F_{N+1-k}}.\frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}],$

supérieure à celle, $[\frac{F_{N-k}}{F_{N+1-k}}.\frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}]$, obtenue en deux itérations avec les cas (i) et (ii) ; en revanche, $f(x_{k+1}^D)$ et $f(x_{k+1}^G)$ devront toutes deux être évaluées.

Initialisation : elle se fait avec $a_1 = a$ et $b_1 = b$.

Arrêt : On s'arrête après avoir calculé la valeur de f en N points (dont deux à la 1^{ere} itération, ce qui peut faire moins de $(N-1)$ itérations à cause du cas (iii)). La longueur de l'intervalle aura au total été réduite dans un rapport au moins égal à : $\prod_{k=1}^{N-1} \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}} = \frac{1}{F_{N+1}}$.

Si l'on désire parvenir à localiser $\hat{x}$ dans un intervalle de longueur inférieure à ε il faudra donc choisir N tel que : $F_{N+1} \geqq \frac{b-a}{\epsilon}$.

On démontre que la méthode de la suite de Fibonacci est optimale, en ce sens qu'on obtient un taux de réduction maximum à nombre d'itérations données.

1.2.1 VARIANTE : MÉTHODE DE LA SECTION D'OR

Elle a l'avantage de ne pas obliger à imposer a priori la valeur de N, mais a un taux de réduction inférieur à la méthode de Fibonacci (pour N grand, on perd environ 17%).

A chaque itération k , les points intérieurs divisent symétriquement et dans le même rapport le segment $[a_k, b_k]$:

$$x_k^G = a_k + \frac{\tau-1}{\tau}(b_k - a_k); \qquad x_k^D = a_k + \frac{1}{\tau}(b_k - a_k)$$

où τ est le nombre d'or.

Ici encore, on conserve un des deux points intérieurs de l'itération précédente ; par exemple dans le cas (i) : $x_{k+1}^D = a_{k+1} + \frac{1}{\tau}(b_{k+1} - a_{k+1}) = a_k + \frac{1}{\tau}(x_k^D - a_k) =$

$a_k + \frac{1}{\tau}.\frac{1}{\tau}(b_k - a_k) = a_k + \frac{\tau-1}{\tau}(b_k - a_k) = x_k^G$.

1.3 MÉTHODE DICHOTOMIQUE

Principe : A l'itération k interviennent trois points intérieurs, situés respectivement au quart, à la moitié et aux trois-quarts du segment $[a_k, b_k]$; à chaque itération l'intervalle est réduit de moitié, mais on doit calculer la valeur de f en deux nouveaux points.

En effet, dans l'intervalle $[a_k, b_k]$, on connait par les calculs précédents les valeurs de f en a_k, b_k et $\frac{a_k+b_k}{2}$ et elles satisfont $f(\frac{a_k+b_k}{2}) \leqq MIN\ \{f(a_k), f(b_k)\}$; on évalue alors de plus f en $\frac{3a_k+b_k}{4}$ et $\frac{a_k+3b_k}{4}$; puis on prend pour extrémités a_{k+1}, b_{k+1}et milieu $\frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$du nouvel intervalle 3 points consécutifs (parmi les 5 points précédents) pour lesquels f vérifie la même inégalité.

1.4 FONCTIONS DÉRIVABLES

Soit f une fonction à valeurs réelles définie et dérivable dans un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée.

On dit que $\hat{x}$ est un *point stationnaire* de f lorsque $f'(\hat{x}) = 0$.

Lemma 3 *Une condition nécessaire pour que f, dérivable, passe par un minimum local en $\hat{x}$ est que $\hat{x}$ soit un point stationnaire de f.*

Preuve : Par l'absurde : f, dérivable, est différentiable en $\hat{x}$:

$$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + h.f'(\hat{x}) + o(h).$$

Si $f'(\hat{x}) > 0$, pour $h < 0$ assez petit, $h.\left[f'(\hat{x}) + \frac{o(h)}{h}\right] < 0$ ausi et donc $f(\hat{x} + h) < f(\hat{x})$. Même chose, si $f'(\hat{x}) < 0$, pour $h > 0$ assez petit.■

On peut montrer que lorsque f est, de plus, *convexe*, cette condition est aussi suffisante : en tout point où elle est stationnaire f passe par un minimum local et même global. En revanche l'unimodalité de f n'assure pas la suffisance de la condition.

1.5 METHODE DICHOTOMIQUE POUR LES FONCTIONS UNIMODALES DERIVABLES

Principe : A l'itération k interviennent les extrémités et le milieu du segment $[a_k, b_k]$; à chaque itération l'intervalle est réduit de moitié et on doit calculer la valeur de f'en un nouveau point.

En effet, dans l'intervalle $[a_k, b_k]$, on connait par les calculs précédents les valeurs de f' en a_k, b_k et elles satisfont : $f'(a_k) < 0, f'(b_k) > 0$, ce qui suffit à assurer, f étant unimodale, que $\hat{x}$, où elle a son minimum, appartienne à $[a_k, b_k]$.
On évalue alors $f'(\frac{a_k+b_k}{2})$; si $f'(\frac{a_k+b_k}{2}) > 0$, on prend $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$ de façon à retrouver les bons signes pour f' aux extrémités du nouveau segment; si $f'(\frac{a_k+b_k}{2}) < 0$, c'est $a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$ et $b_{k+1} = b_k$ qu'il faut prendre; si $f'(\frac{a_k+b_k}{2}) = 0$, on peut s'arrêter!

1.6 MÉTHODE DE NEWTON

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2, c.-à-d. deux fois dérivable et de dérivée seconde continue. On note f' et f'' ses dérivées.

La méthode de Newton cherche à engendrer une suite de points (x^k) tendant vers un point stationnaire, c.-à-d. une solution de $f'(\hat{x}) = 0$, en procédant de la façon suivante :

À l'itération k , f' est remplacée par sa linéarisée en x^k :

$l(x) = f'(x^k) + [x - x^k].f''(x^k)$,

et x^{k+1} est déterminée par $l(x^{k+1}) = 0$ d'où : $x^{k+1} = x^k - \frac{f'(x^k)}{f''(x^k)}$.

On connait des *conditions suffisantes de convergence* de la méthode de Newton à partir d'un point initial x^0 qulconque de $[a, b]$:

f de classe C^3 ; $f'(a).f'(b) < 0$; $f''(x) > 0$ en tout x (ce qui entraine la stricte convexité de f) ; $0 \leqq 1 - \frac{d}{dx}\left[\frac{f'(x)}{f''(x)}\right] \leqq q < 1$ en tout x.

Le *taux de convergence* est alors *quadratique,* en ce sens qu'il existe $\beta > 0$ tel que $\left\|x^{k+1} - \hat{x}\right\| \leqq \beta \left\|x^k - \hat{x}\right\|^2$.

Ces conditions sont très restrictives ; on applique souvent la méthode de Newton dans des cas où elles ne sont pas satisfaites !

1.6.1 Variante : MÉTHODE DE LA SÉCANTE

On peut éviter le calcul de $f''(x^k)$ en le remplaçant par $\frac{f'(x^k)-f'(x^{k-1})}{x^k-x^{k-1}}$ (ce qui revient à approcher la tangente en $(x^k, f'(x^k))$ par une sécante) ; d'où

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f'(x^k).\left[x^k-x^{k-1}\right]}{f'(x^k)-f'(x^{k-1})}.$$

Le taux de convergence n'est plus que *super-linéaire*:

$$\frac{\left\|x^{k+1}-\hat{x}\right\|}{\left\|x^k-\hat{x}\right\|^{\tau}} \rightarrow \text{limite } (\tau : \text{nombre d'or}).$$

2 OPTIMISATION D'UNE FONCTION DIFFÉRENTIABLE DE n VARIABLES

2.1 GRADIENT

Soit f une fonction à valeurs réelles définie dans un convexe ouvert C de $\mathbb{R}^n$:

$$f : x = \begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_j \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} \longmapsto f(x) = f(x_1, ..., x_j, ..., x_n).$$

On dit que f est *différentiable* en $x \in C$ si elle y possède des dérivées partielles $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, j = 1, ..., n$ et admet pour approximation du 1^{er} ordre la forme linéaire qu'elles définissent :

$$f(x+h)[= f(x_1+h_1, ..., x_j+h_j, ..., x_n+h_n)] = f(x)+\sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}.h_j+o(\|h\|)$$

On appelle *gradient de f en x* le vecteur noté $g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \\ \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ d'où :

$$f(x+h) = f(x) + {}^{\tau}g(x).h + o(\|h\|).$$

La variation de f est donc du 2^{eme} ordre lorsque ${}^{\tau}g(x).h = 0$.

Lorsque $g(x) \neq 0$, l'ensemble $\{y \mid f(y) = f(x) + {}^{\tau}g(x).\,[y-x]\}$ est, par définition, l'hyperplan tangent en x à l'hypersurface de niveau $\{z \mid f(z) = f(x)\}$, il a donc $g(x)$ pour vecteur normal ; de plus, puisque

$$f(x+\lambda g(x)) = f(x) + \lambda\, {}^{\tau}g(x).g(x) = f(x) + \lambda \left\|g(x)\right\|^2 > f(x) \text{ pour} \lambda > 0,$$

il est dirigé du côté des points où f prend des valeurs plus élevées qu'en x.

Comme l'on cherchera à minimiser f , c'est la direction opposée $\delta = -g(x)$, dite direction de l'*anti-gradient* qui sera intéressante.

2.2 MINIMA ET POINTS STATIONNAIRES

Comme dans le cas $n = 1$, on dit que f passe par un *minimum (global* ou *absolu)* en $\hat{x}$ lorsque $x \in C \Longrightarrow f(x) \geqq f(\hat{x})$ et que f passe par un *minimum local* en $\hat{x}$ lorsqu'il existe un voisinage V de $\hat{x}$ tel que $x \in V \Longrightarrow f(x) \geqq f(\hat{x})$.

Rappelons qu'un voisinage V de $\hat{x}$ dans C est un sous-ensemble de C contenant une boule ouverte $\{y \mid \|y - x\| < \epsilon\}]$.

On dit que $\hat{x}$ est un *point stationnaire* de f lorsque $g(\hat{x}) = 0$.

Lemma 4 *Une condition nécessaire pour que f, différentiable, passe par un minimum local en $\hat{x}$ est que $\hat{x}$ soit un point stationnaire de f .*

Preuve : Par l'absurde : f est différentiable en $\hat{x}$:

$(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_j}.h_j + o(\|h\|)$

Si $\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_{j_0}} \neq 0$, prenons h tel que $h_{j_0} = -\lambda \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_{j_0}}$ $(\lambda > 0)$ et $h_j \neq 0$ pour $j \neq j_0$; d'où

$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) - \lambda[\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_{j_0}}]^2 + o(|\lambda|)$

et donc, pour λ assez petit, $f(\hat{x} + h) < f(\hat{x})$.■

Remarque. Si f est différentiable et convexe,

$\forall x, \forall h, \qquad f(x + h) \geqq f(x) + {}^{\tau}g(x).h.$

$g(\hat{x}) = 0$ ($\hat{x}$ stationnaire) est alors aussi condition *suffisante* d'optimalité.

2.3 MÉTHODE DU GRADIENT

Elle exploite la propriété suivante :

Proposition 5 *La direction de l'anti-gradient est la direction de plus grande pente, en ce sens que :*

$MAX_{\{h \mid \|h\| = \|g(x)\|\}} \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x) - f(x+\lambda h)}{\lambda \|h\|}$

est atteint pour $h = -g(x)$.

Preuve. $f(x) - f(x + \lambda h) = -\lambda\, {}^{\tau}g(x).h + o(\lambda\, \|h\|)$. D'où, pour $\|h\| = \|g(x)\|$,

$$\frac{f(x)-f(x+\lambda h)}{\lambda\|h\|} = \frac{-\lambda\, {}^{\tau}g(x).h + o(\lambda\|g(x)\|)}{\lambda\|g(x)\|} = \frac{-\, {}^{\tau}g(x).h}{\|g(x)\|} + \frac{o(\lambda)}{\lambda},$$

et donc $\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x)-f(x+\lambda h)}{\lambda\|h\|} = \frac{-\, {}^{\tau}g(x).h}{\|g(x)\|}$,

où $-\, {}^{\tau}g(x).h$ est maximum (sous $\|h\| = \|g(x)\|$) pour $h = -g(x)$.

2.3.1 Pas de la méthode du gradient

Les variations de f lorsque l'on part de x dans la direction de l'anti-gradient sont celles de la fonction d'une seule variable $\lambda \geqq 0$:

$\varphi : \lambda \longmapsto \varphi(\lambda) = f(x - \lambda g(x))$.

Cette fonction est dérivable de dérivée :

$\varphi'(\lambda) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x - \lambda g(x)).g_j(x) = -{}^{\tau}g(x - \lambda g(x)).g(x)$

Notons en particulier que : $\varphi'(0) = -{}^{\tau}g(x).g(x) = -\|g(x)\|^2 < 0$.

ϕ est donc strictement décroissante au voisinage de $\lambda = 0$.

Tant que $\varphi'(\lambda) > 0$, on continue à se déplacer et s'arrête en

$x^\dagger = x - \lambda^\dagger g(x)$,

où $\lambda^\dagger$ est la plus petite valeur de λ solution de $\varphi'(\lambda) = 0$ (si elle existe).

2.3.2 Méthode du gradient

Partant d'un point initial x^0, on répète le pas $x \to x^\dagger$ précédent :

$$x^k \to x^{k+1} = (x^k)^\dagger$$

jusqu'à satisfaire un critère d'arrêt, qui peut être, par exemple,

$$\left\|g(x^k)\right\| < \epsilon$$

ou

$$\left|f(x^{k+1}) - f(x^k)\right| < \epsilon$$

(ce qui dans les deux cas indique que f est proche d'être stationnaire).

Cette méthode a un point faible : il résulte en effet de

$\varphi'(\lambda^\dagger) = -{}^{\tau}g(x^\dagger).g(x) = 0$

que les gradients en x et $x^\dagger$ sont orthogonaux, donc qu'à chaque pas on prend une direction orthogonale à la direction précédente : le cheminement se fait "en zigzag".

Pour éviter cela et accélérer la convergence, on peut avoir recours à l'un des procédés suivants :

- diminuer le pas, c.-à-d. ne pas aller jusqu'en $x^\dagger$. Par exemple, effectuer des pas prédéterminés en imposant une suite $\left(\lambda^k\right)$ telle que $\lambda^k \downarrow 0$ et $\sum_k \lambda^k = +\infty$;

-toutes les m itérations, au lieu de partir dans la direction de l'anti-gradient en x^k, "couper" en partant dans la direction $\delta = x^k - x^{k-m}$;

-utiliser des directions "conjuguées" (voir ci-dessous).

Convergence de la méthode du gradient

Si f est continûment différentiable et si il existe c_0 tel que $\{x \mid f(x) < c_0\}$ soit non-vide et borné, alors la méthode du gradient converge vers un point stationnaire.

2.4 MÉTHODE DU GRADIENT CONJUGUÉ

2.4.1 DIRECTIONS CONJUGUÉES PAR RAPPORT À UNE FORME QUADRATIQUE DÉFINIE POSITIVE

Forme quadratique On appelle *forme quadratique définie positive (de* n variables) toute application

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avec $x \mapsto f(x) = \frac{1}{2}\ {}^\tau x.C.x + {}^\tau p.x$

avec $\underset{(n,1)}{p}$ et où $\underset{(n,n)}{C}$ est une matrice *définie positive,* c.-à-d. :

i) C est symétrique : $C = {}^\tau C$ $(c_{jk} = c_{kj})$; et ii) ${}^\tau x.C.x > 0$ pour tout $x \neq 0$.

Sous forme développée, $f(x)$ s'écrit donc :

$$f(x_1, ..., x_j, ..., x_n) = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^n x_j \left[\sum_{k=1}^n c_{jk} x_k\right]\right] + \sum_{j=1}^n p^j x_j$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n c_{jj} x_j^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{j-1} c_{jk} x_j x_k + \sum_{j=1}^n p^j x_j.$$

Caractérisation : La matrice C est définie positive ssi tous ses déterminants mineurs principaux sont positifs :

$$c_{11} > 0; det \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} > 0; ..; det \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1j} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2j} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{j1} & c_{j2} & ... & c_{jj} \end{bmatrix} > 0; ..; det C > 0.$$

Noter que C est régulière.

Propriétés de f : On vérifie facilement que f est strictement convexe; il en résulte que.f a un unique point stationnaire, où elle passe par un minimum global ; ce point est caractérisé par $g(x) = 0$, où $g(x)$ est le gradient de f en x :

$$g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \\ \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}x_1 + \sum_{k\neq 1} c_{1k}x_k + p^1 \\ \dots \\ c_{jj}x_j + \sum_{k\neq j} c_{jk}x_k + p^j \\ \dots \\ c_{nn}x_n + \sum_{k\neq n} c_{nk}x_k + p^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1.x + p^1 \\ \dots \\ C_j.x + p^j \\ \dots \\ C_n.x + p^n \end{bmatrix}$$

qui s'écrit encore : $g(x) = C.x + p$;

Le point où f atteint son minimum est donc l'unique solution du système linéaire $C.x + p = 0$, c.-à-d. le point : $\hat{x} = -C^{-1}.p$.

La méthode des *directions conjuguées,* que nous allons voir maintenant, peut être considérée, quand on l'applique à une fonction quadratique, comme une méthode itérative de calcul de la solution $\hat{x}$ du système précédent.

2.4.2 Directions conjuguées

Deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ définissent des *directions conjuguées* par rapport à la forme quadratique f (ou : par rapport à la matrice C) lorsque

$^\tau x.C.y = 0 \qquad (\Longleftrightarrow {}^\tau y.C.x = 0)$.

Une direction donnée a une infinité de directions conjuguées, qui forment un espace vectoriel de dimension $(n-1)$.

Cas particulier : Le vecteur gradient de f en x étant $g(x) = C.x + p$ et le minimum de f étant atteint en $\hat{x}$ tel que $p = -C.\hat{x}$,

$^\tau y.g(x) =^\tau y.(C.x + p) =^\tau y.C.x +^\tau y.p = {}^\tau y.C.(x - \hat{x})$.

Les directions conjuguées de la direction $(x - \hat{x})$ sont donc les directions orthogonales au gradient en x, c.-à-d. les directions situées dans l'hyperplan tangent en x à l'hypersurface de niveau $\{z \mid f(z) = f(x)\}$.

Example 6 $n = 2; C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}; p = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$;

$f(x) = \frac{1}{2} {}^\tau x.C.x + {}^\tau p.x = \frac{1}{2}\left[x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2\right] + \frac{1}{3}x_1x_2 + x_1 + 3x_2$.

$g(x) = \begin{bmatrix} x_1 + \frac{1}{3}x_2 + 1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 3 \end{bmatrix}; \qquad C^{-1} = \frac{18}{25}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$;

$\hat{x} = -C^{-1}.p = -\frac{18}{25}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{25} \\ -\frac{16}{25} \end{bmatrix}$.

Soit $x = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ *;* $\delta = x - \hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{14}{25} \\ \frac{26}{25} \end{bmatrix}$ *a pour conjuguée* $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ *telle que :* $^\tau\delta.C.y = \begin{bmatrix} \frac{14}{25} & \frac{26}{25} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 + \frac{1}{3}y_2 \\ \frac{1}{3}y_1 + \frac{3}{2}y_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 68y_1 + 131y_2 = 0$.

2.4.3 Deux Lemmes

La méthode du gradient conjugué s'appuiera sur les deux lemmes suivants :

Lemma 7 *Soit C une matrice définie positive. A partir de n vecteurs linéairement indépendants $y^1, ..., y^k, ..., y^n$, on peut toujours construire n vecteurs $\delta^1, ..., \delta^k, ..., \delta^n$ également linéairement indépendants et, de plus, conjugués deux à deux, donnés par les formules :*

$\delta^1 = y^1$;

$\delta^2 = y^2 - \left(\frac{{}^\tau y^2.C.\delta^1}{{}^\tau \delta^1.C.\delta^1}\right)\delta^1$;

...

$\delta^k = y^k - \sum_{l=1}^{k-1}\left(\frac{{}^\tau y^k.C.\delta^l}{{}^\tau \delta^l.C.\delta^l}\right)\delta^l$

....

Preuve. L'indépendance linéaire des δ^k se déduit de ce que les y^k, pouvant eux-même s'exprimer (d'après les formules) comme combinaisons linéaires des δ^k, ne pourraient être linéairement indépendants si ceux-ci ne l'étaient pas.

En particulier, pour tout l, $\delta^l \neq 0$ d'où, C étant définie positive, ${}^\tau\delta^l.C.\delta^l > 0$.

La vérification des conjugaisons se fait directement et par récurrence.■

Lemma 8 *Soit f forme quadratique définie positive :*

$f(x) = \frac{1}{2}\ {}^\tau x.C.x + {}^\tau p.x.$

Etant donné un point quelconque x^0 et n vecteurs $\delta^1, ..., \delta^k, ..., \delta^n$, linéairement indépendants et conjugués deux à deux, le minimum de f est atteint en

$\hat{x} = x^0 + \sum_{k=1}^{n}\hat{\lambda}_k\delta^k$,

où, pour tout k, $\hat{\lambda}_k = -\frac{{}^\tau g(x^0).\delta^k.}{{}^\tau\delta^k.C.\delta^k}$ et minimise $\varphi_k(\lambda_k) = f(x^0 + \lambda_k\delta^k)$.

$\hat{\lambda}_k$ minimise également $\psi_k(\lambda_k) = f(x^{k-1} + \lambda_k\delta^k)$, où $x^{k-1} = x^0 + \sum_{l=1}^{k-1}\lambda_l\delta^l$,

et s'exprime aussi comme $\hat{\lambda}_k = -\frac{{}^\tau g(x^{k-1}).\delta^k.}{{}^\tau\delta^k.C.\delta^k}$.

Preuve. Les δ^k étant linéairement indépendants, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe des λ_k uniques tels que $x - x^0 = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\delta^k$.

Minimiser f dans $\mathbb{R}^n$ est donc équivalent à minimiser, dans $\mathbb{R}^n$ également, la fonction de n variables

$F(\lambda_1, ..., \lambda_k, ..., \lambda_n) = f(x^0 + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\delta^k)$.

Mais par développement et réduction (on sait que ${}^\tau\delta^k.C.\delta^l = 0$ pour $l \neq k$),

$f(x^0 + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\delta^k) = \frac{1}{2}{}^\tau(x^0 + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\delta^k).C.(x^0 + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\delta^k) +$

${}^\tau p.(x^0 + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\delta^k) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\lambda_k^2\ {}^\tau\delta^k.C.\delta^k + \lambda_k({}^\tau x^0.C + {}^\tau p)\delta^k\right].$

En particulier, en prenant $\lambda_k = 0$ pour tous les k sauf un, on voit que :

$\frac{1}{2}\lambda_k^2\ {}^\tau\delta^k.C.\delta^k + \lambda_k(\ {}^\tau x^0.C + p)\delta^k = f(x^0 + \lambda_k\delta^k) - f(x^0)$

d'où

$F(\lambda_1, ..., \lambda_k, ..., \lambda_n) = f(x^0 + \sum_{k=1}^n \lambda_k\delta^k) = f(x^0) + \sum_{k=1}^n \left[f(x^0 + \lambda_k\delta^k) - f(x^0)\right].$

Le minimum de F s'obtient donc en minimisant indépendamment chacun des termes entre crochets par rapport à l'unique variable dont il dépend.

Le minimum de

$f(x^{k-1} + \lambda_k\delta^k) - f(x^{k-1}) = \frac{1}{2}\lambda_k^2\ {}^\tau\delta^k.C.\delta^k + \lambda_k({}^\tau x^0.C + {}^\tau p).\delta^k,$

polynôme du second degré en λ_k, est atteint en

$\hat{\lambda}_k = -\frac{({}^\tau x^0.C + {}^\tau p).\delta^k}{{}^\tau\delta^k.C.\delta^k} = -\frac{{}^\tau g(x^0).\delta^k}{{}^\tau\delta^k.C.\delta^k}.$

De même

$f(x^{k-1} + \lambda_k\delta^k) - f(x^{k-1}) = \frac{1}{2}\lambda_k^2\ {}^\tau\delta^k.C.\delta^k + \lambda_k({}^\tau x^{k-1}.C + {}^\tau p).\delta^k.$

Or, puisque ${}^\tau\delta^k.C.\delta^l = 0$ pour $l \neq k$,

${}^\tau x^{k-1}.C.\delta^k = {}^\tau(x^0 + \sum_{l=1}^{k-1}\lambda_l\delta^l).C.\delta^k = {}^\tau x^0.C.\delta^k,$

d'où

${}^\tau g(x^{k-1}).\delta^k = \left[{}^\tau x^{k-1}.C + {}^\tau p\right].\delta^k = \left[{}^\tau x^0.C + {}^\tau p\right].\delta^k = {}^\tau g(x^O).\delta^k$

et aussi

$f(x^{k-1} + \lambda_k\delta^k) - f(x^{k-1}) = f(x^0 + \lambda_k\delta^k) - f(x^0)$, ce qui montre que $\varphi_k(\lambda_k)$ et $\psi_k(\lambda_k)$ ont leur minimum au même point $\hat{\lambda}_k$.■

2.4.4 Méthode du Gradient conjugué pour les fonctions quadratiques

Initialisation. Choix de x^0, point initial et d'une direction $\delta^1 = -g(x^0)$.

k^{eme} *étape.*
Calcul de $\hat{\lambda}_k$ minimisant $\varphi_k(\lambda_k) = f(x^{k-1} + \lambda_k\delta^k)$:

$\hat{\lambda}_k = -\frac{{}^\tau g(x^{k-1}).\delta^k}{{}^\tau\delta^k.C.\delta^k} = \frac{{}^\tau g(x^{k-1}).g(x^{k-1})}{{}^\tau\delta^k.C.\delta^k}.$

$x^k = x^{k-1} + \hat{\lambda}_k\delta^k$.Calcul de $g(x^k)$.

si $g(x^k) = 0$, x^k est optimal **fin**; sinon

$\delta^{k+1} = -g(x^k) + \beta^k.\delta^k$,avec $\beta^k = \frac{{}^\tau g(x^k).C.\delta^k}{{}^\tau\delta^k.C.\delta^k} = \frac{{}^\tau g(x^k).g(x^k)}{{}^\tau g(x^{k-1}).g(x^{k-1})}.$
$k \longleftarrow k+1.$

Proposition 9 *La méthode du gradient conjugué pour les fonctions quadratiques atteint le minimum en n itérations.*

Preuve. i) Posons $y^k = -g(x^{k-1}), \quad k = 1, ..., n$ et montrons que les $(y^k)_{1 \leqq k \leqq n}$ sont linéairement indépendants.

Un calcul semblable à celui fait dans la preuve du lemme 8 montre que $F_k(\lambda_1, ..., \lambda_k) = f(x^0 + \sum_{l=1}^k \lambda_l \delta^l) = f(x^0) + \sum_{l=1}^k \left[f(x^0 + \lambda_l \delta^l) - f(x^0) \right]$ et donc que $F_k(\lambda_1, ..., \lambda_k)$ a pour minimum $F_k(\hat{\lambda}_1, ..., \hat{\lambda}_k) = f(x^k)$ et que $\frac{\partial F_k(\hat{\lambda}_1, ..., \hat{\lambda}_k)}{\partial \lambda_l} = 0$, pour tout $l = 1, ..., k$. Or, $\frac{\partial F_k(\hat{\lambda}_1, ..., \hat{\lambda}_k)}{\partial \lambda_l} = {}^\tau g(x^k).\delta^l$; $y^{k+1} = -g(x^k)$ est donc orthogonal à tous les $(\delta^l)_{l \leqq k}$, donc à l'e.v. qu'ils engendrent, qui est aussi (même raison qu'au lemme ci-dessus) l'e.v. engendré par les $(y^l)_{1 \leqq l \leqq k} = [-g(x^{l-1})]_{1 \leqq l \leqq k}$. Si ceux-ci sont linéairement indépendants, les $(y^l)_{1 \leqq l \leqq k+1}$ le sont donc aussi ; par récurrence, ce sera vrai pour tous les $(y^k)_{1 \leqq k \leqq n}$.

ii) Vérifions que les $(\delta^k)_{1 \leqq k \leqq n}$ sont bien reliés aux $(y^k)_{1 \leqq k \leqq n}$ par les relations du lemme 7. De ce que $y^{k+1} = \delta^{k+1} - \frac{{}^\tau g(x^k).C.\delta^k}{{}^\tau \delta^k.C.\delta^k}.\delta^k$ et que les δ^k sont conjugués, il résulte que ${}^\tau y^{k+1}.C.\delta^l = 0$ pour $l < k$. D'où

$$\delta^{k+1} = y^{k+1} - \sum_{l=1}^k \left(\frac{{}^\tau y^{k+1}.C.\delta^l}{{}^\tau \delta^l.C.\delta^l} \right) \delta^l = y^{k+1} - \left(\frac{{}^\tau y^{k+1}.C.\delta^k}{{}^\tau \delta^k.C.\delta^k} \right) \delta^k$$

$$= -g(x^k) + \frac{{}^\tau g(x^k).C.\delta^k}{{}^\tau \delta^k.C.\delta^k}.\delta^k.$$

iii) Enfin $\hat{\lambda}_k = -\frac{{}^\tau g(x^{k-1}).\delta^k}{{}^\tau \delta^k.C.\delta^k}$ a bien l'une des expressions données au lemme 9. On obtiendra donc $x^n = \hat{x}$.

iv) Montrons enfin la validité des secondes expressions de $\hat{\lambda}_k$ et β^k.

De ce que δ^k est la différence entre $y^k = -g(x^{k-1})$ et une c.l. de divers $y^l = -g(x^{l-1})$ tous orthogonaux à celui-ci, il résulte que

$${}^\tau g(x^{k-1}).\delta^k = {}^\tau g(x^{k-1}).g(x^{k-1})$$

d'où

$$\hat{\lambda}_k = -\frac{{}^\tau g(x^{k-1}).\delta^k}{{}^\tau \delta^k.C.\delta^k} = \frac{{}^\tau g(x^{k-1}).g(x^{k-1})}{{}^\tau \delta^k.C.\delta^k}$$

D'autre part $\hat{\lambda}_k.\delta^k = x^k - x^{k-1}$, d'où

$$C.\delta^k = \frac{1}{\hat{\lambda}_k} C. \left[x^k - x^{k-1} \right] = \frac{1}{\hat{\lambda}_k} \left[g(x^k) - g(x^{k-1}) \right]$$

et

$${}^\tau g(x^k).C.\delta^k = \frac{1}{\hat{\lambda}_k} \, {}^\tau g(x^k). \left[g(x^k) - g(x^{k-1}) \right] = \frac{1}{\hat{\lambda}_k} \, {}^\tau g(x^k).g(x^k)$$

et donc

$$\beta^k = \frac{{}^\tau g(x^k).C.\delta^k}{{}^\tau \delta^k.C.\delta^k} = \frac{{}^\tau g(x^k).g(x^k)}{{}^\tau g(x^{k-1}).g(x^{k-1})}. \blacksquare$$

2.4.5 Méthode du Gradient conjugué pour les fonctions quelconques

Fletcher et Reeves ont adapté l'algorithme précédent à une fonction différentiable quelconque:

Initialisation. Choix de x^0, point initial et d'une direction $\delta^1 = -g(x^0)$

k^{eme} *étape.*

Calcul de $\hat{\lambda}_k$ minimisant $\varphi_k(\lambda_k) = f(x^{k-1} + \lambda_k \delta^k)$:

$x^k = x^{k-1} + \hat{\lambda}_k \delta^k$.Calcul de $g(x^k)$.

si $\left\| g(x^k) \right\| < \varepsilon$ **fin;**

sinon

$\delta^{k+1} = -g(x^k) + \beta^k.\delta^k$,avec $\beta^k = \frac{^\tau g(x^k).g(x^k)}{^\tau g(x^{k-1}).g(x^{k-1})}$.

$k \longleftarrow k+1$.

3 OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES

On appelle *programme différentiable* tout problème d'optimisation sous contraintes de la forme :

$$PDif \left| \begin{array}{l} MIN\ f(x) \\ \quad a_i(x) \leqq 0, \quad i = 1,..,m \end{array} \right.$$

où f et les a_i sont des fonctions différentiables de n variables.

On notera respectivement $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ et $\frac{\partial a_i(x)}{\partial x}$ les transposés des vecteurs-gradients en x de f et des a_i : $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, .., \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, .., \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right]$;

$$\frac{\partial a_i(x)}{\partial x} = \left[\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_1}, .., \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j}, .., \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_n} \right] \quad (i = 1,..,m).$$

x est *solution réalisable* de $PDif$ lorsque toutes les contraintes
$a_i(x) \leqq 0$,$i = 1,..,m$,
sont satisfaites.
La i^{eme} contrainte est *serrée* en x lorsque $a_i(x) = 0$.

Soit x, réalisable et soit S l'ensemble des contraintes serrées en x. On dit que la *condition de qualification des contraintes* est satisfaite en x s'il existe une direction δ (c-à-d $\delta \in \mathbb{R}^n$ et $\delta \neq 0$) telle que :

$\frac{\partial a_i(x)}{\partial x}.\delta < 0 \qquad$ pour tout $i \in S$.

Cette propriété implique que l'on peut s'éloigner de x dans la direction δ sans sortir immédiatement du domaine des réalisables (cf la preuve du lemme ci-dessous).

En $x*$ la condition de qualification n'est pas vérifiée

Lemma 10 *Si $\hat{x}$ est solution optimale de $PDif$ alors il n'existe pas de vecteur δ de $\mathbb{R}^n$ solution du système :* $S1\left|\begin{array}{l} \frac{\partial a_i(\hat{x})}{\partial x}.\delta < 0, \quad i \in S \\ \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x}.\delta < 0 \end{array}\right.$ *, où S désigne l'ensemble des contraintes serrées en $\hat{x}$.*

Preuve. Par l'absurde. Soit δ solution de S1. De la différentiabilité des fonctions a_i et f , il résulte que :

$a_i(\hat{x} + \lambda\delta) = a_i(\hat{x}) + \lambda\frac{\partial a_i(\hat{x})}{\partial x}\delta + o(\lambda)$, $i = 1, .., m$
et
$f(\hat{x} + \lambda\delta) = f(\hat{x}) + \lambda\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x}\delta + o(\lambda)$

d'où l'on déduit que pour $\lambda > 0$ assez petit

$a_i(\hat{x} + \lambda\delta) < 0$, pour $i \in S$ comme pour $i \notin S$,
et
$f(\hat{x} + \lambda\delta) < f(\hat{x})$

ce qui contredit l'optimalité de $\hat{x}$.■

Lemma 11 *(Théorème de FRITZ-JOHN) Si $\hat{x}$ est solution optimale de $PDif$ alors il existe un vecteur $v = \left[v^0, v^1, .., v^i, .., v^m\right]$ solution du système*

$$S2\left|\begin{array}{ll} v \geqq 0 \text{ avec } \left[v^0, v^S\right] > 0 & (1) \\ v^0\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x} + \sum_{i=1}^m v^i\frac{\partial a_i(\hat{x})}{\partial x} = 0 & (2) \\ v^i a_i(\hat{x}) = 0 \quad \forall i = 1, .., m & (3) \end{array}\right.$$

Preuve. Par l'absurde. Si S2 n'a pas de solution, le système

S'2 $\left|\begin{array}{ll} \left[v^0, v^S\right] > 0 & (1') \\ v^0\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x} + \sum_{i\in S} v^i\frac{\partial a_i(\hat{x})}{\partial x} = 0 & (2') \end{array}\right.$ n'en a pas non plus (il suffirait de compléter une solution par $v^i = 0, i \notin S$, pour obtenir une solution de S2).

Introduisant la matrice $A = \left[\begin{array}{cccccc} {}^\tau\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x} & {}^\tau\frac{\partial a_1(\hat{x})}{\partial x} & ... & {}^\tau\frac{\partial a_i(\hat{x})}{\partial x} & ... & {}^\tau\frac{\partial a_m(\hat{x})}{\partial x} \end{array}\right]$

et les vecteurs $c = \left[\begin{array}{cccccc} -1 & -1 & ... & -1 & ... & -1 \end{array}\right]$ et $x = {}^\tau\left[v^0, v^S\right]$,

ceci équivaut à affirmer que :

il n'existe pas $x \geqq 0$ tel que $c.x < 0$ et que $A.x = 0$.

Le théorème de l'alternative nous dit qu'alors :

il existe u tel que $u.A \leqq c$.

Posant $\delta = {}^\tau u$, ceci s'écrit encore :

$\left|\begin{array}{l} \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x}.\delta < 0 \\ \frac{\partial a_i(\hat{x})}{\partial x}.\delta < 0, \quad i \in S \end{array}\right.$, ce qui n'est autre que S1.

Par le lemme précédent, sa compatibilité contredit l'optimalité de $\hat{x}$.■

Theorem 12 *(Conditions de KUHN et TUCKER). Des conditions nécessaires pour que $\hat{x}$, solution réalisable de PDif où la condition de qualification des contraintes est satisfaite, soit solution optimale de PDif sont qu'il existe un vecteur $\hat{u}=\left[\hat{u}^1,..,\hat{u}^i,..,\hat{u}^m\right]$ (les multiplicateurs de LAGRANGE) tel que*

$$\left|\begin{array}{ll} \hat{u} \geqq 0 & (1) \\ \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x} + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}^i \frac{\partial a_i(\hat{x})}{\partial x} = 0 & (2) \\ \hat{u}^i a_i(\hat{x}) = 0 \qquad \forall i = 1,..,m & (3) \end{array}\right.$$

Preuve. Montrons d'abord, par l'absurde, que toute solution $v \geqq 0$ de S2 du lemme précédent satisfait $v^0 > 0$.

Si $v^0 = 0$, v^S est solution du système

$$\left|\begin{array}{ll} v^S > 0 & (1") \\ \sum_{i \in S} v^i \frac{\partial a_i(\hat{x})}{\partial x} = 0 & (2") \end{array}\right.$$

ce qui entraine, par le théorème de l'alternative

(introduire : $A = \left[\begin{array}{ccccc} {}^{\tau}\frac{\partial a_1(\hat{x})}{\partial x} & ... & {}^{\tau}\frac{\partial a_i(\hat{x})}{\partial x} & ... & {}^{\tau}\frac{\partial a_m(\hat{x})}{\partial x} \end{array}\right]$,
$c = \left[\begin{array}{ccccc} -1 & ... & -1 & ... & -1 \end{array}\right]$ et $x = {}^{\tau} v^S$)

l'incompatibilité du système :

$$\left| \frac{\partial a_i(\hat{x})}{\partial x}.\delta < 0, \ i \in S \right.,$$

contredisant l'hypothèse de qualification des contraintes en $\hat{x}$.

On obtient donc le vecteur $\hat{u}$ cherché en prenant

$\hat{u}^i = \frac{v^i}{v^0}$ pour tout $i = 1,..,m$.■

Les conditions de Kuhn et Tucker sont de plus des conditions *suffisantes* d'optimalité lorsque f et les a_i possèdent certaines propriétés de convexité ; plus précisément, il suffit que f soit *pseudo-convexe,* c-à-d que *:*

$f(x) < f(y) \Longrightarrow \frac{\partial f(y)}{\partial x}.(x-y) < 0$

et que les a_i soient *quasi-convexes* c-à-d que *:*

$a_i(x) \leq a_i(y) \Longrightarrow \frac{\partial a_i(y)}{\partial x}.(x-y) \leq 0.$

Theorem 13 *(Suffisance des conditions de KUHN et TUCKER). Supposons f pseudo-convexe et les a_i quasi-convexes. Alors, des conditions suffisantes pour que $\hat{x}$, solution réalisable de PDif, en soit solution optimale sont qu'il existe un vecteur $\hat{u}=\left[\hat{u}^1,..,\hat{u}^i,..,\hat{u}^m\right]$ tel que*

$$\left|\begin{array}{ll} \hat{u} \geqq 0 & (1) \\ \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x} + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}^i \frac{\partial a_i(\hat{x})}{\partial x} = 0 & (2) \\ \hat{u}^i a_i(\hat{x}) = 0 \qquad \forall i = 1,..,m & (3) \end{array}\right.$$

Preuve. Soit x réalisable.; a_i étant quasi-convexe, pour $i \in S$, on déduit de $a_i(x) \leq 0 = a_i(\hat{x})$ que $\frac{\partial a_i(\hat{x})}{\partial x}.(x-\hat{x}) \leq 0$; d'où, utilisant le fait que $u^i = 0$ pour $i \notin S$,

$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x}.(x-\hat{x}) = -\left[\sum_{i=1}^{m} \hat{u}^i \frac{\partial a_i(\hat{x})}{\partial x}\right].(x-\hat{x}) = -\left[\sum_{i\in S} \hat{u}^i \frac{\partial a_i(\hat{x})}{\partial x}\right].(x-\hat{x})$

$= -\sum_{i\in S} \hat{u}^i \left[\frac{\partial a_i(\hat{x})}{\partial x}.(x-\hat{x})\right] \geq 0.$

Comme f est pseudo-convexe, on a nécessairement $f(x) \geq f(\hat{x})$.$\blacksquare$