Maîtrise d'informatique 2 001-02

ALGORITHMIQUE NUMÉRIQUE

Notes de Cours

Jean-Yves JAFFRAY

CHAPITRE

PROGRAMMATION LINÉAIRE

PROGRAMMATION LINÉAIRE

1 PROGRAMMES LINÉAIRES

Example 1 *PROBLÈME DE TRANSPORT*

Une entreprise de distribution doit transporter un produit disponible en quantités d_i *aux dépôts* $i = 1, ..., m$ *vers des destinations* j *où la demande est* b_j, $j = 1, ..., n$. *La demande totale est égale à l'offre totale :* $\sum_{i=1}^m d_i = \sum_{j=1}^n b_j$. *Le coût unitaire de transport de* i *à* j *est* c^{ij}. *L'objectif de l'entreprise est de minimiser le coût total de transport. Si on note* x_{ij} *la quantité, positive ou nulle, transportée de* i *à* j, *le problème de l'entreprise s'exprime mathématiquement comme :*

$$Minimiser \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c^{ij} x_{ij}$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= d_i \quad (i = 1, ..., m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j \quad (j = 1, ..., n) \\ x_{ij} &\geqq 0 \quad (i = 1, ..., m; j = 1, ..., n). \end{aligned}$$

En introduisant la matrice $\underset{(m+n, m \times n)}{A}$ *de la forme (cas* $m = 3, n = 2$)

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, *le vecteur-ligne* $c = \left[c^{ij}\right]$, *et les vecteurs-colonnes*

$a = \begin{bmatrix} d_i \\ b_j \end{bmatrix}$ *et* $x = [x_{ij}]$, *ceci s'écrit encore :*

$$\begin{array}{l} MIN\ c.x \\ \left| \begin{array}{l} A.x = a \\ x \geqq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Définitions.

On appelle *programme linéaire* (PL) *sous forme standard* tout problème d'optimisation sous contraintes de la forme

$$\begin{array}{l} MIN\ c.x \\ \left| \begin{array}{l} A.x = a \\ x \geqq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

avec pour données $\underset{(m,n)}{A} = [a_{ij}]\,, \quad \underset{(m,1)}{a} = [a_i]\,, \quad \underset{(1,n)}{c} = \left[c^j\right]$

et pour variables $\underset{(n,1)}{x} = [x_j]\,.$

On appelle :

fonction objectif, ou *fonction économique,* l'application $x \longmapsto c.x$;

contraintes de signes les inégalités $x \geqq 0$;

contraintes principales les (autres) contraintes $A.x = a$;

solution réalisable de PL tout x qui satisfait l'ensemble des contraintes ;

solution optimale de PL une solution $\hat{x}$ réalisable et telle que $c.\hat{x} \leqq cx$ pour tout x réalisable ; $c.\hat{x}$ est dite *valeur optimale* de PL.

Il est possible de "ramener" d'autres problèmes d'optimisation à un PL sous forme standard en les transformant de façon telle que l'étude du problème transformé suffise pour obtenir les renseignements souhaités sur le problème initial : existence de solutions réalisables et d'une solution optimale, détermination d'une solution optimale, valeur optimale, etc...

Ainsi une contrainte $f.x \leqq k$ peut être remplacée, en introduisant une variable y_0 dite *variable d'écart,* par $[f.x + y_0 = k\ ;\ y_0 \geqq 0]$.

De même, $f.x \geqq k$ équivaut à $[f.x - y_0 = k\ ;\ y_0 \geqq 0]$.

Une variable z_0 sans contrainte de signe peut être remplacée partout par la différence $(z_0' - z_0'')$,avec de plus $z_0' \geqq 0$ et $z_0'' \geqq 0$.

Une variable $z_0 \leqq 0$ peut être remplacée partout par $-z_0'$,où $z_0' \geqq 0$.

Enfin $MAX\ c.x$ peut être remplacé par $MIN\ (-c).x$.

On appelle donc *programme linéaire* (PL) *sous forme générale* tout problème de maximisation ou minimisation d'une forme linéaire dont les variables sont astreintes à satisfaire des contraintes principales, inégalités ou égalités, linéaires et, pour certaines, à des contraintes de signe.

L'étude des PL sous forme générale se ramène à celle des PL sous forme standard.

2 MÉTHODE DU SIMPLEXE

2.1 Bases d'un PL

Soit

$$PL \quad \left| \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{MIN\ c.x} \\ A.x = a & (1) \\ x \geqq 0 & (2) \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \underset{(m,n)}{A} .$$

Soit $J = \{1, ..., n\}$ l'ensemble des indices des colonnes de A. Pour tout sous-ensemble $B \subset J$, on peut par permutation des colonnes de A, opérée par une post-multiplication de A par une matrice Π, amener en tête les colonnes dont les indices appartiennent à B, d'où une décomposition possible en blocs :

$$A.\Pi = \left[\begin{array}{cc} A^B & A^H \end{array} \right]$$

On dit que B est une *base* lorsque A^B est régulière, c.-à-d. lorsque $\left(A^B\right)^{-1}$existe. Nécessairement, B est carrée, d'où : $|B| = m$. Les indices de B sont dits *de base* et ceux de H *hors-base*.

La pré-multiplication du vecteur x par l'inverse Π^{-1} de Π fournit la décomposition correspondante $\Pi^{-1}.x = \left[\begin{array}{c} x_B \\ x_H \end{array} \right]$ en *composantes de base* x_B et *composantes hors-base* x_H.

En particulier, on associe à la base B le vecteur $\bar{x}$, se décomposant en $\bar{x}_B = \left(A^B\right)^{-1}.a$; $\bar{x}_H = 0$. On appelle $\bar{x}$ *solution de base* B.

Ré-expression des contraintes principales par rapport à une base

D'après les règles du calcul par blocs, les contraintes principales (1) s'écrivent encore:

$A.x = a \Longleftrightarrow A.\Pi.\Pi^{-1}.x = a \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc} A^B & A^H \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} x_B \\ x_H \end{array} \right] = a \Longleftrightarrow$
$A^B.x_B + A^H.x_H = a.$

D'où, par pré-mutiplication des deux membres par $\left(A^B\right)^{-1}$:
$A.x = a \Longleftrightarrow x_B + \left(A^B\right)^{-1}.A^H.x_H = \left(A^B\right)^{-1}.a,$

que l'on peut encore écrire :

(1') $x_B = \left(A^B\right)^{-1}.a - \left(A^B\right)^{-1}.A^H.x_H.$

(1') montre que les composantes hors-base x_H des x satisfaisant les contraintes principales sont des variables libres (x_H peut être pris quelconque dans $\mathbb{R}^{n-m}$).et les composantes de base x_B des variables liées (elles sont alors déterminées par (1')).

En particulier, pour $x_H = 0$, on obtient $x_B = \left(A^B\right)^{-1}.a$, autrement dit $x = \bar{x}$, solution de base B. La solution de base B est donc caractérisée par deux propriétés :

i) elle vérifie (1), ou, ce qui est équivalent, (1') ;

ii) ses composantes hors-base sont nulles.

bases réalisables et bases optimales

Une base B est dite *réalisable* lorsque $\bar{x}$, solution de base B, est solution réalisable de PL, c.-à-d., puisqu'elle satisfait déjà (1) et que $\bar{x}_H = 0$, lorsque $\bar{x}_B = \left(A^B\right)^{-1}.a \geqq 0$.

On dit alors que $\bar{x}$ est *solution de base réalisable.*

La base B est dite *optimale* lorsque $\bar{x}$ est solution optimale.

Example 2 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}$; $B^0 = \{1,2\}$ *n'est pas une base car* A^{B^0} *n'est pas régulière.* $B = \{1,3\}$ *en est une :* $A.\Pi = \begin{bmatrix} A^B & A^H \end{bmatrix}$ *pour* $\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *avec* $A^B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$; $A^H = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\left(A^B\right)^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$; *pour* $a = \begin{bmatrix} 11 \\ 20 \end{bmatrix}$, $\bar{x}_B = \left(A^B\right)^{-1}.a = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 2 \end{bmatrix} \geqq 0$ *: B est base réalisable. En revanche,* $A^0 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ *est de rang 1 et n'a aucune base.*

Interprétation géométrique

Géométriquement, l'ensemble des solutions réalisables est un *polyèdre convexe* $\mathcal{P}$, intersection de la variété $A.x = a$ et des demi-espaces fermés $x_j \geqq 0$ $(j = 1, ..., n)$.

On démontre que, si $rangA = m$, les solutions réalisables de base sont les sommets de $\mathcal{P}$.

Example 3 PL_0 $\left| \begin{array}{r} MIN\ 5x_1 - 3x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leqq 4 \\ x_1 + 5x_2 \leqq 1 \\ x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0 \end{array} \right.$ *se met sous la forme standard en ajoutant deux variables d'écart,* x_3 *et* x_4*; d'où :* PL $\left| \begin{array}{rrrr} \multicolumn{4}{c}{MIN\ 5x_1 - 3x_2} \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & & & = 4 \\ x_1 + 5x_2 & & + x_4 & = 1 \\ \multicolumn{4}{r}{x_j \geqslant 0, j = 1,2,3,4} \end{array} \right.$.

On vérifie que PL a pour bases réalisables : $B = \{1,2\}$,*avec* $\bar{x}_B = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{6}{7} \end{bmatrix}$, $B' = \{1,4\}$,*avec* $\bar{x}'_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B'' = \{3,4\}$,*avec* $\bar{x}''_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $B''' = \{2,3\}$,*avec* $\bar{x}'''_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *.La variété* $\left| \begin{array}{rrr} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & & = 4 \\ x_1 + 5x_2 & + x_4 & = 1 \end{array} \right.$ *étant de dimension 2, le* *polyèdre convexe $\mathcal{P}$ est représentable dans le plan et est constitué d'un polygone convexe et de son intérieur ; ses arêtes sont portées par les intersections avec ce plan des hyperplans $x_j = 0$ $(j = 1, ..., 4)$; ses sommets correspondent aux solutions réalisables de base ; dans le même plan, les courbes de niveau de la fonction objectif sont des droites parallèles entre elles ; $\bar{x}'''$, solution de base $B''' = \{2, 3\}$, apparait comme l'unique solution optimale.*

2.2 Condition suffisante d'optimalité d'une solution de base réalisable

Soit B une base *réalisable.*

Le vecteur c des coefficients de la fonction objectif peut lui-même être décomposé en $c.\Pi = \begin{bmatrix} c^B & c^H \end{bmatrix}$, d'où pour la fonction objectif l'expression

$$c.x = \begin{bmatrix} c^B & c^H \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_B \\ x_H \end{bmatrix} = c^B.x_B + c^H.x_H.$$

Dans le cas des solutions de (1), qui sont aussi celles de

(1') : $x_B = \left(A^B\right)^{-1}.a - \left(A^B\right)^{-1}.A^H.x_H$

$c.x$ peut s'exprimer comme une fonction de x_H seul :

$$c.x = c^B.x_B + c^H.x_H = c^B.\left[\left(A^B\right)^{-1}.a - \left(A^B\right)^{-1}.A^H.x_H\right] + c^H.x_H$$

d'où

$$c.x = c^B.\left(A^B\right)^{-1}.a + \left[c^H - c^B.\left(A^B\right)^{-1}.A^H\right].x_H;$$

soit encore, en remarquant que $c^B.\left(A^B\right)^{-1}.a = c.\bar{x}$,

$$c.x = c.\bar{x} + \left[c^H - c^B.\left(A^B\right)^{-1}.A^H\right].x_H.$$

Comme toute solution réalisable doit satisfaire (1') et (2), donc $x_H \geqq 0$, il suffit que

$$c^H - c^B.\left(A^B\right)^{-1}.A^H \geqq 0$$

pour que $c.\bar{x} \leqq c.x$, donc que $\bar{x}$ soit solution optimale de PL.

$c^H - c^B.\left(A^B\right)^{-1}.A^H$ est appelé vecteur des *coûts réduits.*

On peut donc énoncer : *Une condition suffisante pour qu'une base réalisable B soit optimale est que les coûts réduits associés soient tous non-négatifs.*

2.3 Notations du tableau du simplexe

On associe à chaque base B une matrice de format $(m+1, n+1)$ qui contient toute l'information qui sera nécessaire au pas correspondant de l'algorithme du simplexe, matrice appelée *tableau du simplexe de base B*:

$\begin{bmatrix} \underset{(m,n)}{T} & \underset{(m,1)}{t} \\ \underset{(1,n)}{\bar{d}} & \underset{(1,1)}{-\bar{f}} \end{bmatrix}$ où :

$T = \left(A^B\right)^{-1}.A$, d'où :

$T.\Pi = \left(A^B\right)^{-1}.A.\Pi = \left(A^B\right)^{-1}.\begin{bmatrix} A^B & A^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(A^B\right)^{-1}.A^B & \left(A^B\right)^{-1}.A^H \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} E & \left(A^B\right)^{-1}.A^H \end{bmatrix}$

soit encore,

$T.\Pi = \begin{bmatrix} T^B & T^H \end{bmatrix}$ avec $T^B = E$ et $T^H = \left(A^B\right)^{-1}.A^H$.

En outre :

$t = \left(A^B\right)^{-1}.a$;

$\bar{d} = c - c^B.\left(A^B\right)^{-1}.A$,

d'où $\bar{d}.\Pi = \begin{bmatrix} \bar{d}^B & \bar{d}^H \end{bmatrix}$ avec $\bar{d}^B = c^B - c^B.\left(A^B\right)^{-1}.A^B = 0$

et les *coûts réduits* $\bar{d}^H = c^H - c^B.\left(A^B\right)^{-1}.A^H$;

enfin : $\bar{f} = c^B.t$.

Avec ces notations :

(1') s'écrit : $x_B = t - T^H.x_H$,

la solution de base,$\bar{x}$, a pour sous-vecteurs $\bar{x}_B = t$ et $\bar{x}_H = 0$,

la base B est réalisable lorsque : $t \geqq 0$,

sous les contraintes (1'), $c.x$ peut s'exprimer comme une fonction de x_H seul :

$c.x = c.\bar{x} + \bar{d}^H.x_H = c^B.t + \bar{d}^H.x_H$

et *la condition suffisante d'optimalité devient* : $\bar{d}^H \geqq 0$.

N.B. *Noter que, puisque* $A^B \times \left(A^B\right)^{-1} = E$, *la* j^{eme} *ligne de* $\left(A^B\right)^{-1}$ *est associée à la* j^{eme} *colonne de* A^B. *On peut donc appeler* B *l'ensemble des lignes de* $\left(A^B\right)^{-1}$, *qui est en outre le même que celui des matrices* T *et* $T.\Pi$ *et du vecteur* t $(= x_B)$; *ces lignes sont rangées dans le même ordre que le sont les colonnes correspondantes de* A^B *et* T^B *(les colonnes "de base" de* A*, amenées aux* m *premières positions par la permutation* Π*).*

2.4 Amélioration d'une solution

Soit B une base *réalisable* telle que la condition suffisante d'optimalité de la solution de base associée ne soit pas satisfaite : $NON\ [\bar{d}^H \geqq 0]$.

Autrement dit, il existe $e \in H$ tel que : $\bar{d}^e < 0$.

Cherchons une solution meilleure que $\bar{x}$ (si possible).

Les solutions de (1') de la forme $x(\theta)$ avec :

$x_e(\theta) = \theta \in \mathbb{R}^+, x_{H\setminus\{e\}}(\theta) = 0$ et donc

$$x_B(\theta) = t - T^H.x_H(\theta) = t - \left[\begin{array}{cc} T^{H\setminus\{e\}} & T^e \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c} 0 \\ \theta \end{array}\right] = t - \theta T^e,$$

sont réalisables lorsque l'inégalité vectorielle $\theta T^e \leqq t$ est satisfaite ;

la valeur en $x(\theta)$ de la fonction objectif étant

$$c.x(\theta) = c.\bar{x} + \bar{d}^H.x_H = c.\bar{x} + \left[\begin{array}{cc} \bar{d}^{H\setminus\{e\}} & \bar{d}^e \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c} 0 \\ \theta \end{array}\right] = c.\bar{x} + \theta.\bar{d}^e,$$

où $\bar{d}^e < 0$, on a intérêt à prendre θ le plus grand possible.

Si $T^e \leqq 0$,l'inégalité $\theta T^e \leqq t$ est vraie et donc $x(\theta)$ est réalisable pour tout $\theta \in \mathbb{R}^+$. La fonction objectif peut atteindre des valeurs arbitrairement basses. On dit alors que PL *n'est pas borné.*

Sinon, $x(\theta)$ n'est réalisable que lorsque $\theta.t_{je} \leqq t_j$ pour $j \in B$ et $t_{je} > 0$, soit :

$\theta \leqq \tilde{\theta} = MIN\{\frac{t_j}{t_{je}} \mid j \in B \text{ et } t_{je} > 0\}$.

La nouvelle solution considérée est $x(\tilde{\theta})$. Notons qu'il existe au moins un indice $s \in B$ tel que $\frac{t_s}{t_{se}} = \tilde{\theta}$ et donc que $x_s(\hat{\theta}) = t_s - \hat{\theta}.t_{se} = 0$.

Posons $B^\dagger = B \cup \{e\}\setminus\{s\}$ et $H^\dagger = H \cup \{s\}\setminus\{e\}$.

Notant Π° la matrice permutant les colonnes d'indices e et s, et posant $\Pi^\dagger = \Pi.\Pi^\circ$,

nous pouvons introduire les décompositions :

$(\Pi^\dagger)^{-1}.x = \left[\begin{array}{cc} x^{B^\dagger} & x^{H^\dagger} \end{array}\right]$ et $T.\Pi^\dagger = \left(A^B\right)^{-1}.A.\Pi^\dagger$

soit encore,

$T.\Pi^\dagger = \left[\begin{array}{cc} T^{B^\dagger} & T^{H^\dagger} \end{array}\right]$ avec $T^{B^\dagger} = \left(A^B\right)^{-1}.A^{H^\dagger}$et $T^H = \left(A^B\right)^{-1}.A^{H^\dagger}$.

Si $B^\dagger$est une base, alors $x(\tilde{\theta})$, satisfaisant (1') et $x_{H^\dagger}(\tilde{\theta}) = 0$,est la solution de base (réalisable) $B^\dagger$.

Montrons que $B^\dagger$ est effectivement une base, c.-à-d. que $\left(A^{B^\dagger}\right)^{-1}$ existe. On peut remarquer que

$A^{B^\dagger} = A^B . \left(A^B\right)^{-1} . A^{B^\dagger} = A^B . T^{B^\dagger}$,

donc que, A^B étant régulière, il suffit que $T^{B^\dagger}$ le soit aussi, pour que $A^{B^\dagger}$ soit régulière comme produit de matrices régulières. Or, $T^{B^\dagger}$ ne diffère de la matrice-unité $T^B = \left(A^B\right)^{-1} . A^B$ que par la substitution de la colonne T^e à la colonne T^s :

$$T^{B^\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & ... & 0 & t_{je} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & t_{j'e} & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & t_{se} & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & t_{j''e} & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & t_{j'''e} & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

et est régulière puisque $\det(T^{B^\dagger}) = t_{se} \neq 0$ (car $t_{se} > 0$).

Nous sommes donc passés de la base B à la base $B^\dagger = B \cup \{e\} \backslash \{s\}$. On dit que l'indice e est *entré dans la base* et que l'indice s est *sorti de la base*.

Nous sommes ainsi passés de $\bar{x}$, solution de base réalisable B, à $x(\tilde{\theta}) = \bar{x}^\dagger$, solution de base réalisable $B^\dagger$, ce qui améliore la valeur de la fonction objectif d'une quantité $\tilde{\theta}.\bar{d}^e \leqq 0$.

Notons qu'il peut arriver que $\tilde{\theta} = 0$; en ce cas $\bar{x}^\dagger = \bar{x}$: la base a changé, mais l'on n'a pas bougé!

2.5 Principe de la méthode du simplexe

On part d'une base réalisable de PL (la recherche de cette base constitue une phase préliminaire dite **Phase I** de la méthode du simplexe ; nous ne décrivons donc pour l'instant que la **Phase II** de la méthode).

On chemine de base réalisable en base réalisable selon le procédé décrit ci-dessus.

Pas de l'algorithme

A chaque pas, on teste l'optimalité de la solution de base courante.

Si la C.S. d'optimalité, $\bar{d}^H \geqq 0$ est satisfaite : $\bar{x}$ *est optimale.* FIN.

Sinon, on cherche à améliorer la solution courante ; on choisit un indice entrant e parmi les $j \in H$ tels que $\bar{d}^j < 0$; il lui correspond une colonne T^e de la matrice T.

Si $T^e \leqq 0$, PL *n'est pas borné.* FIN.

Sinon, on choisit un indice sortant s parmi les $j \in \arg\min\{\frac{t_j}{t_{je}} \mid j \in B \text{ et } t_{je} > 0\}$.

On passe au pas suivant avec une nouvelle base réalisable : $B^\dagger = B \cup \{e\} \backslash \{s\}$.

Convergence

Le nombre de bases réalisables est fini (il est majoré par $\binom{n}{m}$)).

La convergence est donc assurée au bout d'un nombre fini de pas si l'on peut garantir qu'il n'y aura pas *cyclage*, c.-à-d. retour à une base déjà rencontrée.

A chaque pas il peut y avoir une latitude dans le choix de e, puis de s. Certaines règles de choix préviennent tout cyclage ; par exemple :

Règles de BLAND : Choisir une fois pour toutes un ordre d'énumération des indices des colonnes de A,et donc des lignes et des colonnes de T; à chaque pas, faire entrer le premier indice susceptible d'entrer puis sortir le premier indice susceptible de sortir.

Ces règles ne sont pas employées dans la pratique car on a constaté qu'elles demandaient en moyenne 3 fois plus d'itérations que les règles suivantes :

Règles de DANTZIG : à chaque pas, faire entrer un indice e tel quel $\bar{d}^e = \min\{\bar{d}^j \mid j \in H\}$; pas de règle spécifique pour s.

Ces règles n'empêchent pas le cyclage (il existe un exemple de cyclage dû à BEALE), mais dans la pratique on n'en observe jamais.

2.6 Passage d'un tableau au suivant

Les éléments du tableau de base B sont :

$T = \left(A^B\right)^{-1}.A$; $t = \left(A^B\right)^{-1}.a$; $\bar{d} = c - c^B.T$; $-\bar{f} = -c^B.t$.

Les éléments correspondants du tableau de base $B^\dagger$ peuvent être calculés à partir d'eux.

$T^\dagger = \left(A^{B^\dagger}\right)^{-1}.A$ s'écrit encore

$T^\dagger = \left(A^{B^\dagger}\right)^{-1}.A^B.\left(A^B\right)^{-1}.A = [\left(A^B\right)^{-1}.A^{B^\dagger}]^{-1}.\left(A^B\right)^{-1}.A$

d'où

$T^\dagger = [T^{B^\dagger}]^{-1}.T$. De même, $t^\dagger == [T^{B^\dagger}]^{-1}.t.$, et donc

$\left[\begin{array}{cc} T^\dagger & t^\dagger \end{array}\right] = [T^{B^\dagger}]^{-1} \times \left[\begin{array}{cc} T & t \end{array}\right]$

N.B. *Ne pas confondre* $T^{B^\dagger}$, *sous-matrice de* $T.\Pi^\dagger$, *avec la sous-matrice de* $T^\dagger.\Pi^\dagger$ *que l'on noterait* $T^{\dagger B^\dagger}$.

La matrice $[T^{B^\dagger}]^{-1}$ est égale à

$$[T^{B^\dagger}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & ... & 0 & -\frac{t_{je}}{t_{se}} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & -\frac{t_{j'e}}{t_{se}} & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & \frac{1}{t_{se}} & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & -\frac{t_{j''e}}{t_{se}} & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & -\frac{t_{j'''e}}{t_{se}} & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

comme on le démontre en effectuant par blocs le produit $T^{B^\dagger}.[T^{B^\dagger}]^{-1} = E$ et en identifiant les blocs des deux membres.

On reconnait une matrice opérant un pivotage avec pivot t_{se} dans $\begin{bmatrix} T & t \end{bmatrix}$.

Pour $\bar{d}^\dagger$, on tire de $\bar{d}^\dagger = c - c^{B^\dagger}.T^\dagger$ et $\bar{d} = c - c^B.T$ que :

$\bar{d}^\dagger = \bar{d} + [c^B - c^{B^\dagger}.[T^{B^\dagger}]^{-1}].T$. Le calcul montre que :

$c^B - c^{B^\dagger}.[T^{B^\dagger}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & ... & 0 & -\frac{d^e}{t_{se}} & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$

Comme

$-\bar{f}^\dagger = (-\bar{f}) + [c^B - c^{B^\dagger}.[T^{B^\dagger}]^{-1}].t,$

le tableau complet $\begin{bmatrix} T^\dagger & t^\dagger \\ \bar{d}^\dagger & -\bar{f}^\dagger \end{bmatrix}$ s'obtient à partir du tableau complet précédent $\begin{bmatrix} T & t \\ \bar{d} & -\bar{f} \end{bmatrix}$ par prémultiplication par la matrice de pivotage

$$\begin{bmatrix} 1 & ... & 0 & -\frac{t_{je}}{t_{se}} & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & -\frac{t_{j'e}}{t_{se}} & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & \frac{1}{t_{se}} & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & -\frac{t_{j''e}}{t_{se}} & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & -\frac{t_{j'''e}}{t_{se}} & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & -\frac{d^e}{t_{se}} & 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.7 Calcul pratique

Dans les calculs "à la main" on peut éviter de permuter les colonnes, qui restent donc en permanence dans l'ordre initial. Ce sont donc les matrices T et non $T.\Pi$ qui sont représentées (il en résulte entre autres que les vecteurs-unités, colonnes de $T^B = E$, apparaissent en ordre dispersé).

Example 4 *Le PL sous forme standard de l'exemple précédent* $\left| \begin{array}{l} MIN\ 5x_1 - 3x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad = 4 \\ x_1 + 5x_2 \qquad + x_4 = 5 \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,3,4 \end{array} \right.$. *a une base réalisable évidente* $B = \{3, 4\}$, *à laquelle correspond le tableau*

$$\begin{array}{c} (3) \\ (4) \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & \underline{\mathbf{5}} & 0 & 1 \\ & & & \\ 5 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ \\ 0 \end{array} \right]$$

Comme $\bar{d}^2 = -3 < 0$, *on fait entrer* $e = 2$;

comme $\hat{\theta} = \min\{\frac{4}{3}, 1\} = 1$, *on fait sortir* $s = 4$.

D'où la nouvelle base $B^\dagger = \{3, 2\}$ *et le nouveau tableau :*

$$\begin{array}{c} (3) \\ (2) \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc} \frac{7}{5} & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ & & & \\ \frac{28}{5} & 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \\ 3 \end{array} \right].$$

Comme $\bar{d}^\dagger \geqq 0$, *on est à l'optimum.*

2.8 Phase I de la méthode du simplexe

L'algorithme décrit précédemment exige comme input une base réalisable de PL. La Phase I de la méthode est destinée à fournir cette base. Si PL n'est pas réalisable, elle le montrera ; si Pl est réalisable mais qu'il n'a pas de base en raison d'existence de contraintes redondantes, elle les éliminera et fournira une base du nouveau PL.

On utilise l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(1) x est solution réalisable du système $\left| \begin{array}{c} A.x = a \\ x \geqq 0 \end{array} \right.$

(2) $\left[\begin{array}{c} x \\ 0 \end{array} \right]$ est solution réalisable du système $\left| \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} A & E \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} x \\ x_{\bar{I}} \end{array} \right] = a \\ x \geqq 0 \ ; \ x_{\bar{I}} \geqq 0 \end{array} \right.$

qui s'écrit encore $\left| \begin{array}{c} A.x + x_{\bar{I}} = a \\ x \geqq 0 \ ; \ x_{\bar{I}} \geqq 0 \end{array} \right.$; $\underset{(m,1)}{x_{\bar{I}}} = \left[\begin{array}{c} x_{n+1} \\ \ldots\ldots \\ x_{n+i} \\ \ldots\ldots \\ x_{n+m} \end{array} \right]$ est.dit vecteur des *variables artificielles.*

(3) $\left[\begin{array}{c} x \\ 0 \end{array} \right]$ est solution optimale de PL* $\begin{array}{c} MIN\ 1.x_{\bar{I}} \quad [= \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}] \\ \left| \begin{array}{c} A.x + x_{\bar{I}} = a \\ x \geqq 0 \ ; \ x_{\bar{I}} \geqq 0 \end{array} \right. \end{array}$.

Il en résulte en outre que *PL est réalisable si et seulement si PL* a zéro pour valeur optimale.*

Il n'est pas restrictif de supposer que $a \geqq 0$ (on peut toujours remplacer $A_i.x = a_i < 0$ par $[-A_i].x = -a_i > 0$). PL* a alors I' pour base réalisable, avec pour solution de base $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}_{\bar{I}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$.

Partant de cette base, on peut appliquer l'algorithme du simplexe, Phase II, à PL*. Comme PL* est borné (par zéro), il ne peut s'arrêter qu'en arrivant à une base optimale B^* de celui-ci. *Si la valeur optimale trouvée est positive, PL n'est pas réalisable.*

Si la la valeur optimale trouvée est nulle, la solution optimale de base B^* de PL*, $\begin{bmatrix} \bar{x}^* \\ \bar{x}^*_{\bar{I}} \end{bmatrix}$, est telle que $\bar{x}^*_{\bar{I}} = 0$; $\bar{x}^*$ est donc *solution réalisable de* PL.

Si $B^* \subset J$, c'est aussi une base de PL et $\bar{x}^*$ est la solution de base de PL correspondante, comme solution réalisable de PL ayant ses composantes hors-base nulles.

Ce n'est pas nécessairement le cas, mais on montre qu'on peut alors, par pivotage, sortir un à un de la base les indices artificiels, chacun d'eux pouvant :
-soit être remplacé par un indice entrant appartenant à J ;
-soit, si c'est impossible (absence de pivot), ce qui traduit l'existence d'une contrainte redondante qu'il suffit de supprimer, ne pas être remplacé du tout.

On obtient finalement *une base réalisable de PL, éventuellement débarrassé de ses contraintes redondantes.*

Example 5 *Soit PL*
$$\begin{array}{l} MIN\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \left| \begin{array}{r} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 8 \\ x_i \geqslant 0, i = 1,2,3 \end{array} \right. \end{array}.$$
.En phase I, on introduit deux variables artificielles et résoud
$$PL^* \quad \begin{array}{l} MIN\ x_4 + x_5 \\ \left| \begin{array}{r} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \quad = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \quad + x_5 = 8 \\ x_i \geqslant 0, i = 1, ..., 5 \end{array} \right. \end{array}$$
PL* a une base réalisable évidente $B = \{4, 5\}$, à laquelle correspond le tableau
$$\begin{array}{c} (4) \\ (5) \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & \underline{\boldsymbol{6}} & 0 & 1 \\ & & & & \\ -5 & -3 & -9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ \\ -13 \end{bmatrix}.$$
En effet, comme $\left(A^B\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, *$T$ et t ont les mêmes éléments que A et a ; de plus,* $\bar{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \times T$ *et* $-\bar{f} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \times t$.

Avec les règles de Dantzig, $e = 3$ et $s = 5$; d'où le nouveau tableau :

$$\begin{array}{c} (4) \\ (3) \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{9}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ & & & & \\ -2 & \frac{9}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \\ \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Avec les règles de Dantzig, $e = 1$ et $s = 4$; d'où le tableau (final)

$$\begin{array}{c} (1) \\ (3) \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{9}{4} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{19}{12} & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{6} \\ \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Fin de Phase I, puisque la valeur optimale est nulle et que {1,3} est une base de PL.

Phase II : On revient à PL, dont le tableau de base {1,3} s'obtient à partir du tableau ci-dessus en supprimant les colonnes associées aux variables artificielles et en remplaçant sa dernière ligne par :

$\bar{d} = c - c^B.T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \times T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{113}{12} & 0 \end{bmatrix}$ *et*

$-\bar{f} = -c^B.t = -\begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \times t = \frac{5}{6}$.

$$\begin{array}{c} (1) \\ (3) \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{9}{4} & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & 1 \\ & & \\ 0 & \frac{113}{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{6} \\ \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

Cette base est optimale puisque $\bar{d} \geqq 0$.

2.9 DUALITÉ

À PL, que nous appellerons dorénavant *programme primal*

$$\text{PL1} \left| \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{MIN\ c.x} \\ A.x = a & (1) \\ x \geqq 0 & (2) \end{array} \right.$$

associons un deuxième programme, dit *programme dual*

$$\text{PL2} \left| \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{MAX\ v.a} \\ v.A + d = c & (3) \\ d \geqq 0 & (4) \end{array} \right.$$

PL2 est sous *forme standard duale* : en particulier, les variables sont regroupées en deux vecteurs-lignes, $\underset{(1,m)}{v}$ et $\underset{(1,n)}{d}$ et seul d est astreint à être non-négatif.

Sous forme développée les contraintes principales (3) s'écrivent :

$\sum_{i=1}^{m} v^i.a_{ij} + d^j = c^j \qquad (j = 1, ..., n)$

A toute base B (de PL1) on peut associer, à côté de la *solution primale de base*, $\bar{x} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[A^B\right]^{-1}.a \\ 0 \end{bmatrix}$,
une *solution duale de base* $(\bar{v}, \bar{d})$:

$$\bar{v} = c^B.\left[A^B\right]^{-1} ; \qquad , \bar{d} = c - c^B.\left[A^B\right]^{-1}.A \qquad (= c - \bar{v}.A).$$

(ceci est cohérent avec la notation $\bar{d}$ introduite dans le tableau du simplexe). On en déduit immédiatement que :

$$c.\bar{x} = c^B.\left[A^B\right]^{-1}.a = \bar{v}.a \qquad \text{et} \qquad \bar{d}.\bar{x} = c.\bar{x} - \bar{v}.a = 0.$$

PL1 et PL2 sont reliés par les propriétés suivantes :

Proposition 6 *Pour toute solution réalisable primale, c.-à-d. pour tout x satisfaisant (1) et (2), pour toute solution réalisable duale, c.-à-d. pour tout (v, d) satisfaisant (3) et (4) : $c.x \geqq v.a$.*

De plus si l'égalité $c.x = v.a$ est atteinte, alors x est solution optimale de PL1 et (v, d) solution optimale de PL2.

Proof. (3) $\Longrightarrow [v.A + d].x = c.x$, d'où, par (1), $v.a + d.x = c.x$; par (2) et (3), $d.x \geqq 0$, d'où $c.x \geqq v.a$.

Si $c.x = v.a$, un minorant $v.a$ de PL1 est atteint en x et un majorant $c.x$ de PL2 en (v, d) ; ce sont donc des solutions optimales de PL1et PL2 respectivement. ■

On sait que l'algorithme du simplexe, Phase II, s'arrête en fournissant une base optimale B^*de PL1 lorsque le critère d'arrêt $\bar{d}^* \geqq 0$ est satisfait ; mais cette inégalité signifie que $(\bar{v}^*, \bar{d}^*)$ est solution réalisable et aussi, puisque $c.\bar{x}^* = \bar{v}^*.a$, optimale de PL2 (d'après la proposition précédente).

Il en résulte aussi que lorsque PL1 et PL2 ont des valeurs optimales celles-ci sont toujours égales. Pour que des solutions réalisables x et (v, d) de PL1 et PL2 en soient solutions optimales, il est non seulement suffisant mais aussi nécessaire que $c.x = v.a$.

Cette dernière condition équivaut à $d.x = 0$, ou encore à $[c - v.A].x = 0$, qui équivaut elle-même à : $[c^j - v.A^j].x_j = 0$ pour tout $j \in J$. on appelle ces relations *conditions de complémentarité*.

Le résultat précédent peut être complété comme suit :

Proposition 7 ***(Théorème de dualité)***. *Etant donné les programmes duaux PL1 et PL2 :*

- soit l'un des deux n'est pas réalisable ; l'autre est alors soit réalisable et non-borné, soit lui-même non-réalisable ;

- soit tous deux ont des solutions optimales et même valeur optimale.

La proposition précédente est valable non seulement pour les PL sous forme standard, mais aussi pour les PL sous forme générale. Le dual d'un PL sous forme générale peut être obtenu en le mettant sous forme standard et formant le dual correspondant.

Un cas particulier important est celui des Pl duaux *sous forme canonique:*

$$\text{PL1}\ \left|\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{MIN\ c.x} \\ A.x \geqq a & (1) \\ x \geqq 0 & (2) \end{array}\right. \quad \text{et PL2}\ \left|\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{MAX\ \upsilon.a} \\ \upsilon.A \leqq c & (3) \\ \upsilon \geqq 0 & (4) \end{array}\right. .$$

On vérifie qu'ils sont duaux en mettant PL1 sous la forme standard

$$\text{PL1'}\ \left|\begin{array}{l} MIN\ c.x \\ A.x - y = a \\ x \geqq 0; y \geqq 0 \end{array}\right. \quad \text{ou encore PL1'}\ \left|\begin{array}{c} MIN\ [c,0] \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ [A,-E] \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \\ x \geqq 0; y \geqq 0 \end{array}\right.$$

dont le dual est

$$\text{PL2'}\ \left|\begin{array}{c} MAX\ \upsilon.a \\ \upsilon.A + d = c \\ \upsilon.[-E] + d' = 0 \\ d \geqq 0; d' \geqq 0; \end{array}\right. \quad \text{qui équivaut bien à PL2} \quad \left|\begin{array}{c} MAX\ \upsilon.a \\ \upsilon.A \leqq c \\ \upsilon \geqq 0 \end{array}\right. .$$

3 APPLICATIONS

3.1 Théorème de l'alternative

Proposition 8 *Soit* $\underset{(m,n)}{A}$ *et* $\underset{(1,n)}{c}$. *Un et un seul des deux énoncés suivants est vrai :*

(1) Il existe υ *tel que* $\upsilon.A \leqq c$*;*

(2) Il existe $x \geqq 0$ *tel que* $A.x = 0$ *et* $c.x < 0$.

Proof. *(2)* $\Longrightarrow$ *NON (1) se démontre par l'absurde : De (1) et (2), on tirerait, par* $[\upsilon.A \leqq c$ *et* $x \geqq 0]$, *que* $\upsilon.A.x \leqq c.x$, *d'où, puisque* $A.x = 0$, $0 \leqq c.x$, *en contradiction avec* $c.x < 0$.

(1) $\Longrightarrow$ *NON (2) résulte du théorème de dualité appliqué à*

$$PL1\ \left|\begin{array}{c} MIN\ c.x \\ A.x = 0 \\ x \geqq 0 \end{array}\right. \quad et\ PL2\ \left|\begin{array}{c} MAX\ \upsilon.0\ \ [=0] \\ \upsilon.A + d = c \\ d \geqq 0 \end{array}\right.$$

PL2 étant réalisable et de valeur optimale nulle, PL1 l'est aussi :

$$[A.x = 0 \text{ et } x \geqq 0] \Longrightarrow c.x \geqq 0. \blacksquare$$

3.2 Lemme de Farkas

Proposition 9 *Soit* $\underset{(m,n)}{A}$ *et* $\underset{(1,n)}{c}$ *. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(1) $A.x \geqq 0 \Longrightarrow c.x \geqq 0$ *;*

(2) Il existe $\upsilon \geqq 0$ *tel que* $\upsilon.A = c$.

Proof. *(2)* $\Longrightarrow$ *(1) est évident, car* $[A.x \geqq 0$ *et* $\upsilon \geqq 0] \Longrightarrow \upsilon.A.x \geqq 0$, *d'où* $c.x = \upsilon.A.x \geqq 0$.

Montrons que (1) $\Longrightarrow$ *(2).*

PL1 $\begin{array}{l} MIN\ c.x \\ |A.x \geqq 0 \end{array}$ *se met sous la forme canonique PL1'* $\begin{array}{l} MIN\ c.[x' - x''] \\ \left| \begin{array}{l} A.[x' - x''] \geqq 0 \\ x' \geqq 0; x'' \geqq 0 \end{array} \right. \end{array}$

ou encore PL1' $\begin{array}{l} MIN\ [c, -c] \times \begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix} \\ \left| \begin{array}{l} [A, -A] \times \begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix} \geqq 0 \\ x' \geqq 0; x'' \geqq 0 \end{array} \right. \end{array}$ *dont le dual sous forme canonique*

s'écrit donc PL2' $\begin{array}{l} MAX\ \upsilon.0 \\ \left| \begin{array}{l} \upsilon.A \geqq c \\ \upsilon.[-A] \geqq -c \\ \upsilon \geqq 0 \end{array} \right. \end{array}$ *qui équivaut à* $\begin{array}{l} MAX\ \upsilon.0\ \ [= 0] \\ \left| \begin{array}{l} \upsilon.A = c \\ \upsilon \geqq 0 \end{array} \right. \end{array}$

PL1' (et PL1) est minoré par 0, atteint pour $x = 0$, *qui est donc solution optimale ; d'après le théorème de dualité, PL2' a aussi une solution optimale,* υ^*, *qui est, par définition, réalisable :* $\upsilon^* \geqq 0$ *et* $\upsilon^*.A = c$. ■

N.B. Le théorème de l'alternative et le lemme de Farkas peuvent aussi se démontrer l'un à partir de l'autre.

3.3 Jeux à deux joueurs à somme nulle

Deux joueurs choisissent chacun, *à l'insu l'un de l'autre*, une stratégie, $i \in I = \{1, ..., m\}$ pour l'un, $j \in J = \{1, ..., n\}$ pour l'autre ; le premier gagne alors g_{ij} (unités monétaires) que l'autre perd.

On note G la matrice : $\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & g_{ij} & \cdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$

elle représente donc les gains du premier joueur, dit *joueur des lignes*, et les pertes du deuxième joueur, dit *joueur des colonnes*.

Le joueur des lignes peut s'assurer un gain au moins égal à $MAX_{i \in I}\ MIN_{j \in J}\ g_{ij}$;

de son côté, le joueur des colonnes peut limiter sa perte à au plus $MIN_{j\in J}\ MAX_{i\in I}\ g_{ij}$ .Ces quantités satisfont l'inégalité :

$$MAX_{i\in I}\ MIN_{j\in J}\ g_{ij} \leqq MIN_{j\in J}\ MAX_{i\in I}\ g_{ij}$$

Démonstration : $\forall i,j \quad MIN_{j\in J}\ g_{ij} \leqq g_{ij};$

$$\forall j \quad MAX_{i\in I}\ MIN_{j\in J}\ g_{ij} \leqq MAX_{i\in I}\ g_{ij};$$

$$MAX_{i\in I}\ MIN_{j\in J}\ g_{ij} \leqq MIN_{j\in J}\ MAX_{i\in I}\ g_{ij}.$$

Example 10 . *Jeu de devinette : l'un cache un objet dans une main, l'autre essaie de deviner où il est.*

$$G = \begin{array}{c} \\ Droite? \\ Gauche? \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Droite & Gauche \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} MAX_{i\in I}\ MIN_{j\in J}\ g_{ij} = -1 \\ MIN_{j\in J}\ MAX_{i\in I}\ g_{ij} = 1 \end{array}$$

Il y a un écart entre ce qu'un joueur peut s'assurer et ce que l'autre peut l'empêcher d'atteindre. Nous allons voir que cet écart disparait, en un certain sens, dans les jeux "répétés".

Si le jeu est répété de nombreuses fois, les joueurs peuvent avoir pour critère de s'assurer un *gain moyen* le plus élevé possible. Ceci n'a de sens que pour un joueur choisissant à chaque jeu sa stratégie de façon aléatoire.

On définit une *stratégie mixte* du joueur des lignes comme un vecteur-ligne de probabilité $p = \begin{bmatrix} p^1 & ... & p^i & ... & p^m \end{bmatrix}$, c.-à-d. tel que $p^i \geqq 0$, pour tout $i \in I$ et $\sum_{i=1}^m p^i = 1;$. Tout $i \in I$ sera dorénavant appelé *stratégie pure*, et identifié à une stratégie mixte dégénérée $p = \begin{bmatrix} 0 & ... & 1 & ... & 0 \end{bmatrix}$.

De même, une stratégie mixte du joueur des colonnes est un vecteur-colonne de probabilité q de transposé ${}^{\tau}q = \begin{bmatrix} q^1 & ... & q^j & ... & q^n \end{bmatrix}$; etc...

Si l'un joue la stratégie mixte p et l'autre la stratégie mixte q, l'espérance (mathématique) de gain du joueur des lignes est

$\sum_{i=1}^m p^i . \sum_{j=1}^n g_{ij}.q^j = p.G.q.$

On note respectivement $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ les ensembles de stratégies mixtes des joueurs.

Proposition 11 *Théorème MINIMAX de von Neumann.*

$MAX_{p\in\mathcal{P}}\ MIN_{q\in\mathcal{Q}}\ \ p.G.q = MIN_{q\in\mathcal{Q}}\ MAX_{p\in\mathcal{P}}\ \ p.G.q.$

Proof. *i) Montrons d'abord que $MAX_{p\in\mathcal{P}}\ MIN_{q\in\mathcal{Q}}\ p.G.q = MAX_{p\in\mathcal{P}}\ MIN_{j\in J}\ p.G^j$, c.-à-d. que si le joueur des lignes peut se garantir une espérance de gain contre les stratégies pures de son adversaire, il peut aussi se l'assurer contre ses stratégies mixtes.*

L'inégalité $\leqq$ est évidente, puisque $J \subset \mathcal{Q}$. Dans l'autre sens,$\geqq$, pour tout μ,

$MAX_{p\in\mathcal{P}}\ MIN_{j\in J}\ p.G^j \geqq \mu \Longrightarrow$ *(par compacité de $\mathcal{P}$)* $\exists\ \hat{p}$ *tel que* $MIN_{j\in J}\ \hat{p}.G^j \geqq \mu$

$\Longrightarrow \exists\ \hat{p}$ *tel que* $\forall q,\ \ \hat{p}.G.q = \sum_{j=1}^{n} \hat{p}.G^j.q^j \geqq \mu$; *d'où le résultat.*

On montrerait de même que $MIN_{q\in\mathcal{Q}}\ MAX_{p\in\mathcal{P}}\ \ p.G.q = MIN_{q\in\mathcal{Q}}\ MAX_{i\in I} G_i.q$.

Nous sommes donc ramenés à prouver que : $MAX_{p\in\mathcal{P}}\ \ MIN_{j\in J}\ \ p.G^j\ =$

$MIN_{q\in\mathcal{Q}}\ MAX_{i\in I} G_i.q$.

$MIN_{q\in\mathcal{Q}}\ MAX_{i\in I} G_i.q$ *s'exprime comme un PL sous forme canonique*

$$\textit{PL1}\ \left|\ \begin{array}{c} MIN\ [\lambda' - \lambda''] \\ -G_i.q + [\lambda' - \lambda''] \geqq 0, i = 1, ..., m \\ \sum_{j=1}^{n} q_j \geqq 1 \\ -\sum_{j=1}^{n} q_j \geqq -1 \\ q_j \geqq 0, j = 1, ..., n; \lambda' \geqq 0; \lambda'' \geqq 0 \end{array}\right.$$

et $MAX_{p\in\mathcal{P}}\ \ MIN_{j\in J}\ \ p.G^j$ *comme*

$$\textit{PL2}\ \left|\ \begin{array}{c} MAX\ [\mu' - \mu''] \\ -p.G^j + [\mu' - \mu''] \leqq 0, j = 1..., n \\ \sum_{i=1}^{m} p^i \leqq 1 \\ -\sum_{i=1}^{m} p^i \leqq -1 \\ p^i \geqq 0, i = 1, ..., m; \mu' \geqq 0; \mu'' \geqq 0 \end{array}\right. .$$

On vérifie que PL1 et PL2 sont duaux l'un de l'autre ; étant tous deux réalisables, ils ont des solutions optimales et même valeur optimale :

$$\hat{\mu}' - \hat{\mu}'' = \hat{\lambda}' - \hat{\lambda}'',$$

ce qui équivaut à :

$$MAX_{p\in\mathcal{P}}\ \ MIN_{j\in J}\ \ p.G^j = MIN_{q\in\mathcal{Q}}\ \ MAX_{i\in I} G_i.q.\ \ \blacksquare$$