ISUP – Examen de rattrapage d'optimisation

Durée : 2 heures 30

Exercice 1 (3 points) — *Dualité*

Écrivez le dual du programme linéaire suivant :

$$
(\text{PL}) \quad
\begin{array}{llcl}
\min & 3x_1 + x_2 - 2x_3 & & \\
s.c. & x_1 - 4x_2 + 8x_3 + x_4 - 2x_5 & = & 4 \\
 & x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 & \leq & 13 \\
 & x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_5 & = & 15 \\
 & x_1, x_2 \geq 0, x_4 \leq 0 & &
\end{array}
$$

Exercice 2 (4 points) — *Optimisation non linéaire*

Soit le programme non linéaire :

$$\begin{array}{ll} \min & -\log x_1 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 3x_1 \\ s.c. & x_1^2 + x_2^2 \leq 2 \\ & x_1x_2 \quad\;\; \leq 1 \\ & x_1 \qquad\;\; \leq 1 \\ & x_2 \qquad\;\; \geq 1/2 \end{array}$$

Q 2.1 L'hypothèse de qualification des contraintes est-elle vérifiée pour le point $x = (1, 1)$? Justifiez mathématiquement votre réponse.

Q 2.2 Le point $(1, 1)$ peut-il être un optimum local ? Justifiez votre réponse.

Exercice 3 (6 points) — *Simplexe*

Soit le programme linéaire :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\max & 8x_1 & & & & & - & 2x_4 & - & x_5 & + & 2x_6 & & \\
s.c. & -3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & + & 4x_6 & = & 3 \\
& -4x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & - & x_6 & = & 5 \\
& 2x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & x_5 & + & 2x_6 & = & 5 \\
& \multicolumn{13}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

Q 3.1 Déterminez une base réalisable.

Q 3.2 Effectuez une itération du simplexe en partant de cette base et en appliquant la règle du plus grand coefficient.

Q 3.3 Soit le programme linéaire :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\max & x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & - & x_5 & + & 2x_6 & & \\
s.c. & 2x_1 & + & 2x_2 & + & & + & x_4 & & & + & 4x_6 & = & 5 \\
& -x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & - & x_6 & = & 2 \\
& 3x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & x_5 & + & 2x_6 & = & 2 \\
& \multicolumn{13}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

La base (x_4, x_3, x_5) est-elle réalisable ? Justifiez votre réponse.

Exercice 4 (3 points) — *Méthode révisée du simplexe*

Soit le programme linéaire :

$$
\begin{array}{llllllllll}
\max & & 10x_2 + 12x_3 + 4x_4 & & & & & & & -250 \\
s.c. & -4x_1 + & 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 & + x_5 & & & & = & & 52 \\
 & -4x_1 + & 2x_2 + x_3 - 2x_4 & & + x_6 & & & = & & 2 \\
 & -4x_1 + & 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 & & & + x_7 & & = & & 12 \\
 & 2x_1 + & 3x_2 - x_3 + 2x_4 & & & & + x_8 & = & & 2 \\
 & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0}
\end{array}
$$

Réalisez une itération de la méthode révisée du simplexe en partant de la base (x_6, x_3, x_1, x_8).

Exercice 5 (4 points) — *gradient*

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2$. On cherche à minimiser f sur $\mathbb{R}^2$.

Q 5.1 En partant du point $x^0 = (2, 2)$, à quel point x^1 arrive-t-on si l'on applique une itération de la méthode du gradient ?

Q 5.2 En partant du point $x^2 = (1, 1)$, à quel point x^3 arrive-t-on si l'on applique une itération de la méthode du gradient ?