ISUP – Examen de rattrapage d'optimisation

Durée : 2 heures 30

Exercice 1 (3 points) — *Dualité*

Écrivez le dual du programme linéaire suivant :

$$(PL) \quad \begin{array}{rl} \min & 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ s.c. & x_1 - 4x_2 + 8x_3 + x_4 - 2x_5 = 4 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 5 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 \leq 13 \\ & x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0, x_4 \leq 0 \end{array}$$

Exercice 2 (4 points) — *Optimisation non linéaire*

Soit le programme non linéaire :

$$\begin{array}{rll} \min & -\log x_1 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 3x_1 & \\ s.c. & x_1^2 + x_2^2 & \leq 2 \\ & x_1x_2 & \leq 1 \\ & x_1 & \leq 1 \\ & x_2 & \geq 1/2 \end{array}$$

Q 2.1 L'hypothèse de qualification des contraintes est-elle vérifiée pour le point $x = (1, 1)$? Justifiez mathématiquement votre réponse.

Q 2.2 Le point $(1, 1)$ peut-il être un optimum local ? Justifiez votre réponse.

Exercice 3 (6 points) — *Simplexe*

Soit le programme linéaire :

$$\begin{array}{rl} \max & 8x_1 - 2x_4 - x_5 + 2x_6 \\ s.c. & -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_6 = 3 \\ & -4x_1 + 2x_2 + x_4 - x_6 = 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_5 + 2x_6 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Q 3.1 Déterminez une base réalisable.

Q 3.2 Effectuez une itération du simplexe en partant de cette base et en appliquant la règle du plus grand coefficient.

Q 3.3 Soit le programme linéaire :

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 + 2x_6 \\ s.c. & 2x_1 + 2x_2 + \quad + x_4 + 4x_6 = 5 \\ & -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 = 2 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_5 + 2x_6 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

La base (x_4, x_3, x_5) est-elle réalisable ? Justifiez votre réponse.

Exercice 4 (3 points) — *Méthode révisée du simplexe*

Soit le programme linéaire :

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrcr}
\max & & 10x_2 & + 12x_3 & + 4x_4 & & & & & & -250 \\
s.c. & -4x_1 + & 2x_2 + & 4x_3 & + 2x_4 & + x_5 & & & & = & 52 \\
 & -4x_1 + & 2x_2 + & x_3 & - 2x_4 & & + x_6 & & & = & 2 \\
 & -4x_1 + & 2x_2 + & 2x_3 & + 2x_4 & & & + x_7 & & = & 12 \\
 & 2x_1 + & 3x_2 - & x_3 & + 2x_4 & & & & + x_8 & = & 2 \\
 & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0}
\end{array}
$$

Réalisez une itération de la méthode révisée du simplexe en partant de la base (x_6, x_3, x_1, x_8).

Exercice 5 (4 points) — *gradient*

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2$. On cherche à minimiser f sur $\mathbb{R}^2$.

Q 5.1 En partant du point $x^0 = (2, 2)$, à quel point x^1 arrive-t-on si l'on applique une itération de la méthode du gradient ?

Q 5.2 En partant du point $x^2 = (1, 1)$, à quel point x^3 arrive-t-on si l'on applique une itération de la méthode du gradient ?