ISUP – Examen d'optimisation — 2ème session

Durée : 1 heure

Seuls documents autorisés :
Les transparents de cours et les calculatrices.

Exercice 1 (5 points) — *Méthode révisée du simplexe*

Soit le programme linéaire :

$$
(\text{PL1}) \quad \begin{array}{rl}
\min & -4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 7x_5 + x_6 - x_7 \\
s.c. & -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 + x_6 + x_7 = 10 \\
& x_1 - 2x_3 + x_6 = 4 \\
& -3x_1 + x_2 - 2x_5 = 3 \\
& 2x_3 + 2x_5 + x_7 = 2 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

Q 1.1 Les variables $\{x_1, x_5, x_6, x_7\}$ forment-elles une base réalisable ?

Oui, car c'est une matrice inversible.

Q 1.2 Soit la base $\mathcal{B} = \{x_2, x_4, x_6, x_7\}$. Calculez l'inverse B^{-1} de B.

La sous-matrice B est égale à :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'inverse est :

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Q 1.3 Calculez la valeur $\widehat{x_B}$ des variables de la base (on suppose bien évidemment que toutes les autres variables sont hors base et donc égales à 0).

Pour calculer $\hat{x_B}$, il suffit de calculer $B^{-1}b$, où b est le vecteur du second membre des contraintes. On obtient donc $B^{-1}b = [3 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 2]^T$.

Q 1.4 La base $\mathcal{B} = \{x_2, x_4, x_6, x_7\}$ correspond-elle à l'optimum du problème ? Le cas échéant, justifiez votre réponse. Sinon, quelle variable feriez-vous entrer en base ?

Il faut commencer par calculer $y^T = c_B^T B^{-1} = [-1\ \ 0\ \ 0\ \ 2]$, avec $c_B = [-1\ \ -1\ \ -1\ \ 1]$ (car on est sur un pb de minimisation). Pour chacune des colonnes a de N, la sous-matrice des variables hors base, on calcule si $c_a^T > y^T a$ (attention : ici, on est sur un problème de minimisation, donc penser à transformer les c_a an $-c_a$). Pour x_1, $y^T a = 2 < 4$; pour x_3, on a $y^T a = 3 > -2$; pour x_5, $y^T a = 0 > -7$. Donc, on peut faire entrer en base soit x_1, soit x_5.

Exercice 2 (8 points) — *Optimisation non linéaire*

Soit le programme non linéaire suivant :

$$
(\mathrm{P}) \quad \begin{array}{l} \min\ x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 - 2x_1x_2 - x_1x_3 \\ s.c.\ \ x_1^2 + x_2^3 + x_3^3 \leq 1 \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \end{array}
$$

Q 2.1 Le problème (P) admet-il une solution optimale ? Justifiez votre réponse. (P) a-t-il une solution de valeur nulle ? de valeur strictement négative ?

Q 2.2 Les conditions de Kuhn et Tucker sont-elles nécessaires pour ce problème ?

Q 2.3 Écrivez les conditions de Kuhn et Tucker. Le point $(0, 0, 0)$ vérifie-t-il ces conditions ? Quelle particularité du problème peut-on suspecter à ce stade ?

Q 2.4 Montrez que si $\overline{x}$ est un vecteur vérifiant les conditions de Kuhn et Tucker, alors $\overline{x}$ est un vecteur propre du hessien de la fonction objectif. Rappel : le hessien est la matrice des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Que peut-on dire du signe de la valeur propre correspondante ?

Q 2.5 Déterminez un vecteur $\overline{x}$ vecteur vérifiant les conditions de Kuhn et Tucker et ayant toutes ses composantes $\neq 0$.

Exercice 3 (7 points) — *Optimisation non linéaire*