

**ISUP – Examen d'optimisation**

Durée : 2 heures 30

*Seuls documents autorisés :  
Les calculatrices.***Exercice 1 (3 points) — Dualité**

Écrivez le dual du programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{l} \min 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \text{s.c. } x_1 - 4x_2 + 8x_3 + x_4 - 2x_5 = 4 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 5 \\ \quad 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 \leq 13 \\ \quad x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 15 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0, x_4 \leq 0 \end{array}$$

(PL)

On commence par changer  $x_4$  en  $-x_4$  afin d'avoir des variables soit positives ou nulles, soit sans signe. On remplace également le min par un max. Enfin, on change le  $\geq$  en  $\leq$  :

$$\begin{array}{ll}
 \max & -3x_1 - x_2 + 2x_3 \\
 \text{s.c.} & x_1 - 4x_2 + 8x_3 - x_4 - 2x_5 = 4 \\
 & -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 \leq -5 \\
 & 2x_1 - x_2 + x_3 + 7x_4 \leq 13 \\
 & x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 15 \\
 & x_1, x_2, x_4 \geq 0
 \end{array}$$

Maintenant, on peut calculer le dual comme nous l'avons traité en cours :

$$\begin{array}{ll}
 \min & 4y_1 - 5y_2 + 13y_3 + 15y_4 \\
 \text{s.c.} & y_1 - y_2 + 2y_3 + y_4 \geq -3 \\
 & -4y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \geq -1 \\
 & 8y_1 - 2y_2 + y_3 + 5y_4 = 2 \\
 & -y_1 + 2y_2 + 7y_3 \geq 0 \\
 & -2y_1 - y_2 + 3y_4 = 0 \\
 & y_2, y_3 \geq 0
 \end{array}$$

---

**Exercice 2 (4 points) — *Optimisation non linéaire***

---

Soit le programme non linéaire :

$$\begin{array}{ll} \min & -\log x_1 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 3x_1 \\ \text{s.c.} & x_1^2 + x_2^2 \leq 2 \\ & x_1x_2 \leq 1 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \geq 1/2 \end{array}$$

**Q 2.1** L'hypothèse de qualification des contraintes est-elle vérifiée pour le point  $x = (1, 1)$  ? Justifiez mathématiquement votre réponse.

Notons  $g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2$ ,  $g_2(x) = x_1x_2 - 1$ ,  $g_3(x) = x_1 - 1$ ,  $g_4(x) = 1/2 - x_2$  et  $f(x) = -\log x_1 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 3x_1$ . On veut donc minimiser  $f$  sous les contraintes  $g_i(x) \leq 0$ , comme vu en cours.

Les contraintes serrées sont les 3 premières. Les directions admissibles sont les  $(d_1, d_2)$  (aussi petits que possible) tels que :

$$\begin{aligned} (1 + d_1)^2 + (1 + d_2)^2 - 2 &\leq 0 \\ (1 + d_1)(1 + d_2) - 1 &\leq 0 \\ (1 + d_1) - 1 &\leq 0 \end{aligned}$$

La première contrainte implique que  $d_1 + d_2 \leq 0$  (car  $d_1, d_2$  peuvent être très petits et donc  $d_i^2$  est beaucoup plus petit que  $d_i$ ). Pour la même raison, la 2ème contrainte implique que  $d_1 + d_2 \leq 0$ . Enfin, la 3ème implique que  $d_1 \leq 0$ . Donc les directions admissibles sont :

$$D = \{(d_1, d_2) : d_1 \leq 0 \text{ et } d_1 + d_2 \leq 0\}.$$

Calculons maintenant les directions  $d$  pour lesquelles  $\vec{\nabla} g_i(x)^T d \leq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Cela revient à calculer les  $d$  telles que  $2d_1 + 2d_2 \leq 0$ ,  $d_1 + d_2 \leq 0$  et  $d_1 \leq 0$ . Autrement dit, ce sont les directions de  $D$ . On a donc bien la qualification des contraintes.

**Q 2.2** Le point  $(1, 1)$  peut-il être un optimum local ? Justifiez votre réponse.

Les conditions de Kuhn et Tucker sont nécessaires pour que  $(1, 1)$  soit un optimum local. Elles correspondent à :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f(x) + \lambda_1 \vec{\nabla} g_1(x) + \lambda_2 \vec{\nabla} g_2(x) + \lambda_3 \vec{\nabla} g_3(x) + \lambda_4 \vec{\nabla} g_4(x) &= 0, \\ \lambda_i \vec{\nabla} g_i(x) &= 0\end{aligned}$$

où les  $\lambda_i$  sont positifs ou nuls. Pour le point  $(1, 1)$ , cela implique que  $\lambda_4 = 0$  et :

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Il est clair qu'il n'y a aucune solution avec  $\lambda_i \geq 0$ . Donc le point  $(1, 1)$  ne peut être optimal.

---

**Exercice 3 (6 points) — Simplexe**

---

Soit le programme linéaire :

$$\begin{array}{llll} \max & 8x_1 & & - 2x_4 - x_5 + 2x_6 \\ \text{s.c.} & -3x_1 + 2x_2 + x_3 & & + 4x_6 = 3 \\ & -4x_1 + 2x_2 & + x_4 & - x_6 = 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 & & + x_5 + 2x_6 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

**Q 3.1** Déterminez une base réalisable.

La base  $(x_3, x_4, x_5)$  est bien évidemment réalisable.

**Q 3.2** Effectuez une itération du simplexe en partant de cette base et en appliquant la règle du plus grand coefficient.

La première opération à effectuer consiste à exprimer toutes les lignes du simplexe, et en particulier la fonction objectif, en fonction des variables hors base. On obtient donc :

$$\begin{array}{llll}
 \max & 2x_1 + 6x_2 & & + 2x_6 + 10 \\
 \text{s.c.} & -3x_1 + 2x_2 + x_3 & & + 4x_6 = 3 \\
 & -4x_1 + 2x_2 & + x_4 & - x_6 = 5 \\
 & 2x_1 + 2x_2 & & + x_5 + 2x_6 = 5 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0
 \end{array}$$

Si l'on applique la règle du plus grand coefficient, on doit donc faire entrer  $x_2$  en base. D'où le tableau :

$$\begin{array}{llll}
 \max & 11x_1 & - 3x_3 & - 10x_6 + 19 \\
 \text{s.c.} & -\frac{3}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 & & + 2x_6 = \frac{3}{2} \\
 & -x_1 & - x_3 + x_4 & - 5x_6 = 2 \\
 & 5x_1 & - x_3 & + x_5 - 2x_6 = 2 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0
 \end{array}$$

**Q 3.3** Soit le programme linéaire :

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 + 2x_6 \\
 \text{s.c.} \quad & 2x_1 + 2x_2 + \quad + x_4 \quad + 4x_6 = 5 \\
 & -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 = 2 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \quad + x_5 + 2x_6 = 2 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

La base  $(x_4, x_3, x_5)$  est-elle réalisable ? Justifiez votre réponse.

D'après les équations, cette base a pour valeur  $(x_4, x_3, x_5) = (5, -1, 2)$ . Étant donné que  $x_3$  est négatif, la base n'est pas réalisable.

---

### Exercice 4 (3 points) — *Méthode révisée du simplexe*

---

Soit le programme linéaire :

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 10x_2 + 12x_3 + 4x_4 && -250 \\
 \text{s.c.} \quad & -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 && = 52 \\
 & -4x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_6 && = 2 \\
 & -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_7 && = 12 \\
 & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_8 && = 2 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0
 \end{aligned}$$

Réalisez une itération de la méthode révisée du simplexe en partant de la base  $(x_6, x_3, x_1, x_8)$ .

Tout d'abord, on calcule l'inverse de la base  $B$  :

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & -3/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

ainsi que  $c_B^T = [0 \ 12 \ 0 \ 0]$ . On en déduit donc que  $y^T = c_B^T B^{-1} = [6 \ 0 \ -6 \ 0]$  et que  $x_B^T = [10 \ 20 \ 7 \ 8]$ . Testons si  $x_2$  peut entrer en base : on calcule  $y^T a_2$ , où  $a_2$  représente la colonne du programme linéaire correspondant à la variable  $x_2$ , autrement dit,  $a_2^T = [2 \ 2 \ 2 \ 3]$ . On obtient alors  $y^T a_2 = 0$ . Or  $c_2$ , le coefficient de  $x_2$  dans la fonction objectif est égal à 12. Donc  $c_2 > y^T a_2$  et  $x_2$  peut effectivement entrer en base. On calcule maintenant  $d = B^{-1} a_2 = [0 \ 0 \ -1/2 \ 4]$ . Maintenant, il faut calculer la plus grande valeur de  $t$  pour laquelle  $x_B - td \geq 0$ . Donc  $t = 2$  et la variable sortante est  $x_8$ . La nouvelle base est donc  $(x_6, x_3, x_1, x_2) = (10, 20, 6, 2)$ .

---

### Exercice 5 (4 points) — *gradient*

---

Soit la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2$ . On cherche à minimiser  $f$  sur

$\mathbb{R}^2$ .

**Q 5.1** En partant du point  $x^0 = (2, 2)$ , à quel point  $x^1$  arrive-t-on si l'on applique une itération de la méthode du gradient ?

$$\vec{\nabla} f(x) = (2x_1, 6x_2). \text{ Donc } x^1 = x^0 - \lambda \vec{\nabla} f(x^0) = (2 - 4\lambda, 2 - 12\lambda).$$

$$\varphi(\lambda) = f(x^0 - \lambda \vec{\nabla} f(x^0)) = (2 - 4\lambda)^2 + 3(2 - 12\lambda)^2.$$

$$\varphi'(\lambda) = (-4)2(2 - 4\lambda) + 3(-12)2(2 - 12\lambda) = 32 \times (28\lambda - 5). \text{ D'où } \varphi'(\hat{\lambda}) = 0 \implies \hat{\lambda} = \frac{5}{28}.$$

$$\text{Donc } x^1 = x^0 - \hat{\lambda} \vec{\nabla} f(x^0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{5}{28} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{-1}{7} \end{bmatrix}$$

**Q 5.2** En partant du point  $x^2 = (1, 1)$ , à quel point  $x^3$  arrive-t-on si l'on applique une itération de la méthode du gradient ?

$$\vec{\nabla} f(x) = (2x_1, 6x_2). \text{ Donc } x^3 = x^2 - \lambda \vec{\nabla} f(x^2) = (1 - 2\lambda, 1 - 6\lambda).$$

$$\varphi(\lambda) = f(x^2 - \lambda \vec{\nabla} f(x^2)) = (1 - 2\lambda)^2 + 3(1 - 6\lambda)^2.$$

$$\varphi'(\lambda) = (-2)2(1 - 2\lambda) + 3(-6)2(1 - 6\lambda) = 8 \times (28\lambda - 5). \text{ D'où } \varphi'(\hat{\lambda}) = 0 \implies \hat{\lambda} = \frac{5}{28}.$$

$$\text{Donc } x^3 = x^2 - \hat{\lambda} \vec{\nabla} f(x^2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{5}{28} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{14} \\ \frac{-1}{14} \end{bmatrix}$$