ISUP – Examen d'optimisation

Durée : 2 heures 30

Seuls documents autorisés :
Les calculatrices.

Exercice 1 (3 points) — *Dualité*

Écrivez le dual du programme linéaire suivant :

$$(\text{PL}) \quad \begin{array}{lrl} \min & 3x_1 + x_2 - 2x_3 & \\ s.c. & x_1 - 4x_2 + 8x_3 + x_4 - 2x_5 & = 4 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 & \geq 5 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 & \leq 13 \\ & x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_5 & = 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0, x_4 \leq 0 & \end{array}$$

On commence par changer x_4 en $-x_4$ afin d'avoir des variables soit positives ou nulles, soit sans signe. On remplace également le min par un max. Enfin, on change le $\geq$ en $\leq$:

$$\begin{array}{lrl} \max & -3x_1 - x_2 + 2x_3 & \\ s.c. & x_1 - 4x_2 + 8x_3 - x_4 - 2x_5 & = 4 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 & \leq -5 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 + 7x_4 & \leq 13 \\ & x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_5 & = 15 \\ & x_1, x_2, x_4 \geq 0 & \end{array}$$

Maintenant, on peut calculer le dual comme nous l'avons traité en cours :

$$\begin{array}{lrl} \min & 4y_1 - 5y_2 + 13y_3 + 15y_4 & \\ s.c. & y_1 - y_2 + 2y_3 + y_4 & \geq -3 \\ & -4y_1 + y_2 - y_3 + y_4 & \geq -1 \\ & 8y_1 - 2y_2 + y_3 + 5y_4 & = 2 \\ & -y_1 + 2y_2 + 7y_3 & \geq 0 \\ & -2y_1 - y_2 + 3y_4 & = 0 \\ & y_2, y_3 \geq 0 & \end{array}$$

Exercice 2 (4 points) — *Optimisation non linéaire*

Soit le programme non linéaire :

$$\begin{array}{ll} \min & -\log x_1 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 3x_1 \\ s.c. & x_1^2 + x_2^2 \leq 2 \\ & x_1x_2 \leq 1 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \geq 1/2 \end{array}$$

Q 2.1 L'hypothèse de qualification des contraintes est-elle vérifiée pour le point $x = (1, 1)$? Justifiez mathématiquement votre réponse.

Notons $g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2$, $g_2(x) = x_1x_2 - 1$, $g_3(x) = x_1 - 1$, $g_4(x) = 1/2 - x_2$ et $f(x) = -\log x_1 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 3x_1$. On veut donc minimiser f sous les contraintes $g_i(x) \leq 0$, comme vu en cours.
Les contraintes serrées sont les 3 premières. Les directions admissibles sont les (d_1, d_2) (aussi petits que possible) tels que :

$$\begin{array}{ll} (1+d_1)^2 + (1+d_2)^2 - 2 & \leq 0 \\ (1+d_1)(1+d_2) - 1 & \leq 0 \\ (1+d_1) - 1 & \leq 0 \end{array}$$

La première contrainte implique que $d_1 + d_2 \leq 0$ (car d_1, d_2 peuvent être très petits et donc d_i^2 est beaucoup plus petit que d_i). Pour la même raison, la 2ème contrainte implique que $d_1 + d_2 \leq 0$. Enfin, la 3ème implique que $d_1 \leq 0$. Donc les directions admissibles sont :

$$D = \{(d_1, d_2) : d_1 \leq 0 \text{ et } d_1 + d_2 \leq 0\}.$$

Calculons maintenant les directions d pour lesquelles $\vec{\nabla} g_i(x)^T d \leq 0$, $i = 1, 2, 3$. Cela revient à calculer les d telles que $2d_1 + 2d_2 \leq 0$, $d_1 + d_2 \leq 0$ et $d_1 \leq 0$. Autrement dit, ce sont les directions de D. On a donc bien la qualification des contraintes.

Q 2.2 Le point $(1, 1)$ peut-il être un optimum local ? Justifiez votre réponse.

Les conditions de Kuhn et Tucker sont nécessaires pour que $(1, 1)$ soit un optimum local. Elles correspondent à :

$$\begin{array}{l} \vec{\nabla} f(x) + \lambda_1 \vec{\nabla} g_1(x) + \lambda_2 \vec{\nabla} g_1(2) + \lambda_3 \vec{\nabla} g_3(x) + \lambda_4 \vec{\nabla} g_4(x) = 0, \\ \lambda_i \vec{\nabla} g_i(x) = 0 \end{array}$$

où les λ_i sont positifs ou nuls. Pour le point $(1, 1)$, cela implique que $\lambda_4 = 0$ et :

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Il est clair qu'il n'y a aucune solution avec $\lambda_i \geq 0$. Donc le point $(1, 1)$ ne peut être optimal.

Exercice 3 (6 points) — *Simplexe*

Soit le programme linéaire :

$$\begin{array}{rrrrrrrl} \max & 8x_1 & & & -2x_4 & -x_5 & +2x_6 & \\ s.c. & -3x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & +4x_6 & = 3 \\ & -4x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & -x_6 & = 5 \\ & 2x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & +2x_6 & = 5 \\ & \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0} \end{array}$$

Q 3.1 Déterminez une base réalisable.

La base (x_3, x_4, x_5) est bien évidemment réalisable.

Q 3.2 Effectuez une itération du simplexe en partant de cette base et en appliquant la règle du plus grand coefficient.

La première opération à effectuer consiste à exprimer toutes les lignes du simplexe, et en particulier la fonction objectif, en fonction des variables hors base. On obtient donc :

$$\begin{array}{llllllll}
\max & 2x_1 + 6x_2 & & & & + 2x_6 + 10 & & \\
s.c. & -3x_1 + 2x_2 + x_3 & & & & + 4x_6 & = & 3 \\
 & -4x_1 + 2x_2 & & + x_4 & & - x_6 & = & 5 \\
 & 2x_1 + 2x_2 & & & + x_5 & + 2x_6 & = & 5 \\
 & \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}$$

Si l'on applique la règle du plus grand coefficient, on doit donc faire entrer x_2 en base. D'où le tableau :

$$\begin{array}{llllllll}
\max & 11x_1 & - 3x_3 & & & - 10x_6 + 19 & & \\
s.c. & -\frac{3}{2}x_1 + x_2 & + \frac{1}{2}x_3 & & & + 2x_6 & = & \frac{3}{2} \\
 & -x_1 & - x_3 & + x_4 & & - 5x_6 & = & 2 \\
 & 5x_1 & - x_3 & & + x_5 & - 2x_6 & = & 2 \\
 & \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}$$

Q 3.3 Soit le programme linéaire :

$$\begin{array}{ll}
\max & x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 + 2x_6 \\
s.c. & 2x_1 + 2x_2 + \quad + x_4 \quad + 4x_6 = 5 \\
 & -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 = 2 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \quad + x_5 + 2x_6 = 2 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}$$

La base (x_4, x_3, x_5) est-elle réalisable ? Justifiez votre réponse.

D'après les équations, cette base a pour valeur $(x_4, x_3, x_5) = (5, -1, 2)$. Étant donné que x_3 est négatif, la base n'est pas réalisable.

Exercice 4 (3 points) — *Méthode révisée du simplexe*

Soit le programme linéaire :

$$\begin{array}{lllllllllll}
\max & & 10x_2 & + 12x_3 & + 4x_4 & & & & & & -250 \\
s.c. & -4x_1 + & 2x_2 + & 4x_3 & + 2x_4 & + x_5 & & & & = & 52 \\
 & -4x_1 + & 2x_2 + & x_3 & - 2x_4 & & + x_6 & & & = & 2 \\
 & -4x_1 + & 2x_2 + & 2x_3 & + 2x_4 & & & + x_7 & & = & 12 \\
 & 2x_1 + & 3x_2 - & x_3 & + 2x_4 & & & & + x_8 & = & 2 \\
 & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0}
\end{array}$$

Réalisez une itération de la méthode révisée du simplexe en partant de la base (x_6, x_3, x_1, x_8).

Tout d'abord, on calcule l'inverse de la base B :

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & -3/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

ainsi que $c_B^T = [0 \quad 12 \quad 0 \quad 0]$. On en déduit donc que $y^T = c_B^T B^{-1} = [6 \quad 0 \quad -6 \quad 0]$ et que $x_B^T = [10 \;\; 20 \;\; 7 \;\; 8]$. Testons si x_2 peut entrer en base : on calcule $y^T a_2$, où a_2 représente la colonne du programme linéaire correspondant à la variable x_2, autrement dit, $a_2^T = [2 \;\; 2 \;\; 2 \;\; 3]$. On obtient alors $y^T a_2 = 0$. Or c_2, le coefficient de x_2 dans la fonction objectif est égal à 12. Donc $c_2 > y^T a_2$ et x_2 peut effectivement entrer en base. On calcule maintenant $d = B^{-1} a_2 = [\ 0 \quad 0 \quad -1/2 \quad 4\ ]$. Maintenant, il faut calculer la plus grande valeur de t pour laquelle $x_B - td \geq 0$. Donc $t = 2$ et la variable sortante est x_8. La nouvelle base est donc $(x_6, x_3, x_1, x_2) = (10, 20, 6, 2)$.

Exercice 5 (4 points) — *gradient*

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2$. On cherche à minimiser f sur $\mathbb{R}^2$.

Q 5.1 En partant du point $x^0 = (2, 2)$, à quel point x^1 arrive-t-on si l'on applique une itération de la méthode du gradient ?

$\vec{\nabla} f(x) = (2x_1, 6x_2)$. Donc $x^1 = x^0 - \lambda \vec{\nabla} f(x^0) = (2 - 4\lambda, 2 - 12\lambda)$.
$\varphi(\lambda) = f(x^0 - \lambda \vec{\nabla} f(x^0)) = (2 - 4\lambda)^2 + 3(2 - 12\lambda)^2$.
$\varphi'(\lambda) = (-4)2(2 - 4\lambda) + 3(-12)2(2 - 12\lambda) = 32 \times (28\lambda - 5)$. D'où $\varphi'(\widehat{\lambda}) = 0 \Longrightarrow \widehat{\lambda} = \frac{5}{28}$.
Donc $x^1 = x^0 - \widehat{\lambda} \vec{\nabla} f(x^0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{5}{28} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{-1}{7} \end{bmatrix}$

Q 5.2 En partant du point $x^2 = (1, 1)$, à quel point x^3 arrive-t-on si l'on applique une itération de la méthode du gradient ?

$\vec{\nabla} f(x) = (2x_1, 6x_2)$. Donc $x^3 = x^2 - \lambda \vec{\nabla} f(x^2) = (1 - 2\lambda, 1 - 6\lambda)$.
$\varphi(\lambda) = f(x^2 - \lambda \vec{\nabla} f(x^2)) = (1 - 2\lambda)^2 + 3(1 - 6\lambda)^2$.
$\varphi'(\lambda) = (-2)2(1 - 2\lambda) + 3(-6)2(1 - 6\lambda) = 8 \times (28\lambda - 5))$. D'où $\varphi'(\widehat{\lambda}) = 0 \Longrightarrow \widehat{\lambda} = \frac{5}{28}$.
Donc $x^3 = x^2 - \widehat{\lambda} \vec{\nabla} f(x^2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{5}{28} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{14} \\ \frac{-1}{14} \end{bmatrix}$