ISUP – Examen d'optimisation

Durée : 2 heures 30

Seuls documents autorisés :
Les transparents de cours et les calculatrices.

Exercice 1 (7 points) — *Méthode révisée du simplexe*

Soit le programme linéaire :

$$
\text{(PL1)} \quad \begin{array}{llll}
\max & 2x_1 + x_2 - 2x_3 & & \\
s.c. & x_1 - 4x_2 + 8x_3 + x_4 & = & 4 \\
 & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 & = & 5 \\
 & 2x_1 - x_2 + x_3 + x_6 & = & 13 \\
 & x_1 + x_2 + 5x_3 + x_7 & = & 15 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Soit (x_1, x_2, x_4, x_7) la base courante et soit B la sous-matrice extraite de la matrice des contraintes de (PL1) en ne conservant que les colonnes des variables de la base courante.

Q 1.1 Calculez l'inverse B^{-1} de B.

La sous-matrice B est égale à :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'inverse est :

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Q 1.2 Calculez la valeur $\widehat{x_B}$ des variables de la base (on suppose bien évidemment que toutes les autres variables sont hors base et donc égales à 0).

Pour calculer $\hat{x_B}$, il suffit de calculer $B^{-1}b$, où b est le vecteur du second membre des contraintes. On obtient donc $B^{-1}b = [8 \;\; 3 \;\; 8 \;\; 4]^T$.

Q 1.3 Toujours en partant de la base B, avec la méthode révisée du simplexe, quelle variable feriez-vous entrer en base si vous inspectiez les colonnes de la matrice N des variables hors base dans l'ordre x_6, puis x_5 et enfin x_3 ?

Il faut commencer par calculer $y^T = c_B^T B^{-1} = [0 \ \ -4 \ \ 3 \ \ 0]$. Ensuite, pour chacune des colonnes a de N, la sous-matrice des variables hors base, on calcule si $c_a^T > y^T a$. Pour x_6, on obtient $y^T a = [0 \ \ -4 \ \ 3 \ \ 0].[0 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0]^T = 3$ et $c_a^T = 0$. On ne peut donc pas faire entrer x_6. Pour x_5, on obtient $y^T a = [0 \ \ -4 \ \ 3 \ \ 0].[0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0]^T = -4$ et $c_a^T = 0$. On doit donc faire entrer x_5 en base.

Q 1.4 Si vous faites entrer dans la base la variable que vous avez déterminée à la question précédente, quelle variable devez-vous faire ressortir ?

D'après la méthode révisée du simplexe, on doit calculer d tel que $Bd = a$, autrement dit, ici, tel que $d = B^{-1}a$, avec $a = [0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0]^T$ la colonne correspondant à la variable x_5. On a donc $d = [-1 \ \ -2 \ \ -7 \ \ 3]^T$. On doit alors trouver la plus grande valeur $t \geq 0$ pour laquelle $\widehat{x_B} - td \geq 0$. La ligne correspondant à ce t max nous donne la variable sortant de la base. $\widehat{x_B} - td = [8 \ \ 3 \ \ 8 \ \ 4]^T - t[-1 \ \ -2 \ \ -7 \ \ 3]^T$. Donc le t max est égal à $4/3$ et est obtenu sur la dernière ligne. Autrement dit, x_7 sort de la base.

Exercice 2 (5 points) — *Primal et dual*

Soit le programme linéaire suivant :

$$
(\text{PL2}) \qquad
\begin{array}{rrcrcrcr}
\max & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & \\
s.c. & -x_1 & + & 4x_2 & - & 8x_3 & \geq & -4 \\
 & -x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
 & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 8 \\
 & -x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & \geq & -4 \\
 & \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0}
\end{array}
$$

Q 2.1 Le point $A = (4, 0, 0)$ est-il une solution réalisable de (PL2) ? Justifiez votre réponse. Le cas échéant, quelle est la valeur de la fonction objectif en ce point.

> Le point A vérifie toutes les contraintes. De plus, tous les x_i sont positifs. C'est donc bien une solution réalisable. La valeur de la fonction objectif en ce point est $2x_1 = 8$.

Q 2.2 Déterminez le programme dual (PLD2) de (PL2).

On commence par transformer (PL2) en un problème sous forme standard :

$$
\text{(PL2)}\quad
\begin{array}{lrrrl}
\max & 2x_1 + & x_2 - & 2x_3 & \\
s.c. & x_1 - & 4x_2 + & 8x_3 & \leq 4 \\
 & -x_1 + & 5x_2 + & 2x_3 & \leq 4 \\
 & x_1 - & x_2 + & 2x_3 & \leq 5 \\
 & 2x_1 - & x_2 + & x_3 & \leq 8 \\
 & x_1 + & x_2 + & 5x_3 & \leq 4
\end{array}
$$

Ensuite, il ne reste plus qu'à écrire le dual correspondant :

$$
\text{(PLD2)}\quad
\begin{array}{lrrrrrl}
\min & 4y_1 + & 4y_2 + & 5y_3 + & 8y_4 + & 4y_5 & \\
s.c. & y_1 - & y_2 + & y_3 + & 2y_4 + & y_5 & \geq 2 \\
 & -4y_1 + & 5y_2 - & y_3 - & y_4 + & y_5 & \geq 1 \\
 & 8y_1 + & 2y_2 + & 2y_3 + & y_4 + & 5y_5 & \geq -2 \\
 & \multicolumn{6}{l}{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0}
\end{array}
$$

Q 2.3 Le point $C = (0, 0, 0, 1/3, 4/3)$ est-il une solution réalisable de (PLD2) ? Justifiez votre réponse. Le cas échéant, quelle est la valeur de la fonction objectif du dual en ce point.

Le point C vérifie toutes les contraintes, c'est donc une solution réalisable du dual. La valeur de la fonction objectif au point C est de 8.

Q 2.4 Déterminez la solution optimale du programme primal (PL2).

En fait, on s'aperçoit que A et C sont réalisables et ont la même valeur de fonction objectif. D'après le théorème de la dualité, A et C sont donc les optima de (PL2) et (PLD2).

Q 2.5 Déterminez la solution optimale du programme dual (PLD2).

C est la solution optimale.

Exercice 3 (4 points) — *Modélisation*

On considère un réseau informatique de n ordinateurs. Les ordinateurs sont reliés entre eux par des liaisons diverses (câbles coaxiaux, fibres optiques, etc) qui ont des capacités de transfert (en mégaoctets/s) différentes. Soit $C(i, j) \geq 0$ la capacité de transfert du câble reliant l'ordinateur i à l'ordinateur j, pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ (lorsqu'il n'y a pas de liaison entre i et j, on considérera que $C(i, j) = 0$). Sur une seconde, on cherche à déterminer quelle est le nombre maximal de mégaoctets que l'on peut transférer de l'ordinateur 1 à l'ordinateur n. Écrivez le programme mathématique permettant de répondre à cette question. On supposera que le réseau est sûr et que les liaisons informatiques ne perdent jamais d'informations.

Exercice 4 (4 points) — *Optimisation non linéaire*

Soit le programme non linéaire :

$$
(\mathrm{P}) \quad \begin{array}{lrl}
\max & 4x_1^2 + 9x_2^2 & \\
s.c. & x_1 + 2x_2 & \leq 20 \\
 & x_2 & \leq 7 \\
 & 8x_1 + 4x_2 & \leq 83 \\
 & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Q 4.1 Prouvez que le point $(7, 7)$ ne peut être la solution optimale de (P).

Q 4.2 Prouvez que le point $(7, 6.5)$ ne peut être la solution optimale de (P).