ISUP – Examen d'optimisation

Durée : 2 heures 30

Seuls documents autorisés :
Les transparents de cours et les calculatrices.

Exercice 1 (7 points) — *Méthode révisée du simplexe*

Soit le programme linéaire :

$$
(\text{PL1}) \quad \begin{array}{ll}
\max & 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\
s.c. & x_1 - 4x_2 + 8x_3 + x_4 = 4 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 5 \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = 13 \\
& x_1 + x_2 + 5x_3 + x_7 = 15 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

Soit (x_1, x_2, x_4, x_7) la base courante et soit B la sous-matrice extraite de la matrice des contraintes de (PL1) en ne conservant que les colonnes des variables de la base courante.

Q 1.1 Calculez l'inverse B^{-1} de B.

Q 1.2 Calculez la valeur $\widehat{x_B}$ des variables de la base (on suppose bien évidemment que toutes les autres variables sont hors base et donc égales à 0).

Q 1.3 Toujours en partant de la base B, avec la méthode révisée du simplexe, quelle variable feriez-vous entrer en base si vous inspectiez les colonnes de la matrice N des variables hors base dans l'ordre x_6, puis x_5 et enfin x_3 ?

Q 1.4 Si vous faites entrer dans la base la variable que vous avez déterminée à la question précédente, quelle variable devez-vous faire ressortir ?

Exercice 2 (5 points) — *Primal et dual*

Soit le programme linéaire suivant :

$$
(\text{PL2}) \quad \begin{array}{ll}
\max & 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\
s.c. & -x_1 + 4x_2 - 8x_3 \geq -4 \\
& -x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 4 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 5 \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 8 \\
& -x_1 - x_2 - 5x_3 \geq -4 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Q 2.1 Le point $A = (4, 0, 0)$ est-il une solution réalisable de (PL2) ? Justifiez votre réponse. Le cas échéant, quelle est la valeur de la fonction objectif en ce point.

Q 2.2 Déterminez le programme dual (PLD2) de (PL2).

Q 2.3 Le point $C = (0, 0, 0, 1/3, 4/3)$ est-il une solution réalisable de (PLD2) ? Justifiez votre réponse. Le cas échéant, quelle est la valeur de la fonction objectif du dual en ce point.

Q 2.4 Déterminez la solution optimale du programme primal (PL2).

Q 2.5 Déterminez la solution optimale du programme dual (PLD2).

Exercice 3 (4 points) — *Modélisation*

On considère un réseau informatique de n ordinateurs. Les ordinateurs sont reliés entre eux par des liaisons diverses (câbles coaxiaux, fibres optiques, etc) qui ont des capacités de transfert (en mégaoctets/s) différentes. Soit $C(i,j) \geq 0$ la capacité de transfert du câble reliant l'ordinateur i à l'ordinateur j, pour tout $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ (lorsqu'il n'y a pas de liaison entre i et j, on considérera que $C(i,j) = 0$). Sur une seconde, on cherche à déterminer quelle est le nombre maximal de mégaoctets que l'on peut transférer de l'ordinateur 1 à l'ordinateur n. Écrivez le programme mathématique permettant de répondre à cette question. On supposera que le réseau est sûr et que les liaisons informatiques ne perdent jamais d'informations.

Exercice 4 (4 points) — *Optimisation non linéaire*

Soit le programme non linéaire :

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{array}{ll} \max & 4x_1^2 + 9x_2^2 \\ s.c. & x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ & x_2 \leq 7 \\ & 8x_1 + 4x_2 \leq 83 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Q 4.1 Prouvez que le point $(7,7)$ ne peut être la solution optimale de (P).

Q 4.2 Prouvez que le point $(7,6.5)$ ne peut être la solution optimale de (P).