ISUP – Examen d'optimisation

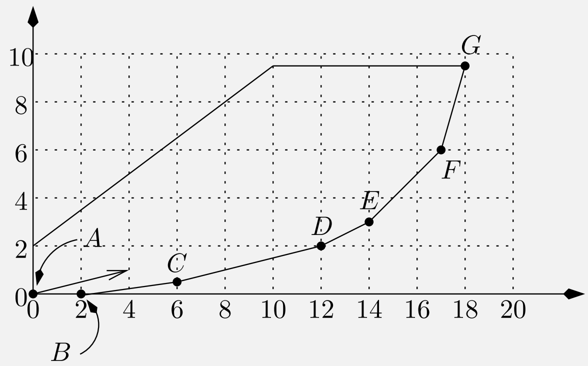
Durée : 2 heures 30

Exercice 1 (4 points) — *Résolution graphique d'un problème linéaire*

Soit le programme linéaire sous forme standard :

$$\begin{array}{lrcrl}
\max & 4x_1 & + & x_2 & \\
s.c. & x_1 & - & 8x_2 & \leq 2 \\
 & x_1 & - & 4x_2 & \leq 4 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & \leq 8 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq 11 \\
 & 7x_1 & - & 2x_2 & \leq 107 \\
 & & & 2x_2 & \leq 19 \\
 & -3x_1 & + & 4x_2 & \leq 8 \\
 & \multicolumn{4}{l}{x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0}
\end{array}$$

Q 1.1 Sachant que les solutions réalisables du problème ci-dessus ont toutes des coordonnées (x_1, x_2) inférieures respectivement à 20 et à 10, dessinez l'ensemble des solutions réalisables de ce problème dans le plan $X_1 \times X_2$. Sur ce dessin, tracez avec une flèche la direction de la fonction objectif.



Q 1.2 Sur le dessin ci-dessus, en partant de la solution réalisable $(0, 0)$, indiquez quels sont les points obtenus lors des différentes itérations du simplexe si l'on applique la règle du « plus grand accroissement de z ». Vous nommerez ces points A, B, C, etc.

Q 1.3 Déterminez graphiquement la solution optimale. Écrivez le système d'équations permettant d'obtenir cet optimum. Quelle est la valeur de la fonction objectif à cet optimum ?

L'optimum est clairement obtenu en G. Ce point est à l'intersection des droites :

$$2x_2 = 19 \qquad \text{et} \qquad 7x_1 - 2x_2 = 107.$$

Par conséquent, la solution optimale est $x^* = (18, 9.5)$ et la valeur de la fonction objectif est $z^* = 4 \times 18 + 9,5 = 81,5$.

Exercice 2 (4 points) — *Modélisation d'un problème d'optimisation*

En France, les besoins en électricité peuvent être grossièrement décrits par trois paramètres :
– la puissance moyenne nécessaire pendant les journées d'hiver (puissance garantie) notée A ;
– la puissance électrique demandée à l'instant de consommation maximale au cours de l'année (puissance de pointe), notée B ;
– l'énergie totale annuelle, notée C.
Pour satisfaire ces besoins, EDF dispose de plusieurs types d'usines, qui peuvent être regroupées en 7 catégories relativement homogènes :

1. les centrales thermiques classiques à combustible fossile ;
2. les centrales équipées de turbines à gaz ;
3. les centrales nucléaires ;
4. les centrales hydro-électriques au fil de l'eau ;
5. les centrales hydro-électriques à petit réservoir ;
6. les centrales hydro-électriques à grand réservoir ;
7. les usines marémotrices.

Soit a_i, b_i, c_i les contributions d'une usine de la catégorie i ($i = 1, 2, \ldots, 7$) aux besoins A, B et C respectivement. Soit d_i le coût d'investissement d'une usine de type i, f_i son coût de fonctionnement. Soit X_i le nombre déjà existant en France d'usines de type i et x_i le nombre d'usines de type i à construire pour assurer la demande énergétique (A, B, C). Les entreprises de construction ayant des capacités limitées, on ne peut construire plus de L_i usines de type i. Par ailleurs, les ressources pécuniaires d'EDF sont limitées à D (en €) en ce qui concerne les investissements pour construire de nouvelles usines.
Quel problème d'optimisation obtient-on si l'on veut minimiser les coûts d'investissement et de fonctionnement, tout en satisfaisant les demandes électriques A, B et C ?

$$
\begin{aligned}
&\min d_i x_i + f_i(X_i + x_i) \\
&s.c. \begin{cases}
\displaystyle\sum_{i=1}^{7} a_i(x_i + X_i) \geq A \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{7} b_i(x_i + X_i) \geq B \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{7} c_i(x_i + X_i) \geq C \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{7} d_i x_i \leq D \\
0 \leq x_i \leq L_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 7
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Exercice 3 (3 points) — *Algorithme du simplexe*

Soit le problème linéaire :
Maximiser $-3x_1 - 7x_3 - 2x_4 - 6x_6$
Sous les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ -x_1 - x_2 + x_6 = 10 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Q 3.1 Déterminez une base réalisable de ce problème.

> Clairement, (x_4, x_5, x_6) est une base réalisable.

Q 3.2 Cette base est-elle optimale ? (justifiez votre réponse). Le cas échéant, donnez la valeur de la fonction objectif à l'optimum. Sinon, effectuez une itération su simplexe avec la règle du « plus grand coefficient ».

> Afin de déterminer si l'on est à l'optimum, il faut exprimer le tableau simplexe en fonction des variables hors base :
>
> $$\max -7x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 70$$
> $$s.c. \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 \quad x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 10 \end{cases}$$
>
> Tous les coefficients de la fonction objectif (exprimée en fonction des variables hors base) étant négatifs, on est à l'optimum et sa valeur est donc -70.

Exercice 4 (5 points) — *Dualité*

Soit le programme linéaire :
Maximiser $3x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 5x_4$
Sous les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_3 \geq 7 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6 \\ x_2 + 6x_4 \geq 8 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Q 4.1 Déterminez le dual de ce programme linéaire.

> Si l'on veut « coller » à la définition du cours, on duplique x_4 en $x_4 = x_4' - x_4''$, avec $x_4' \geq 0$ et $x_4'' \geq 0$. Par ailleurs, on s'arrange pour que toutes les contraintes soient des inégalités $\leq$, d'où le problème :
> Maximiser $3x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 5x_4' - 5x_4''$
> Sous les contraintes :
>
> $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_3 \leq -7 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4' - 4x_4'' \leq 6 \\ -x_2 - 3x_3 - 4x_4' + 4x_4'' \leq -6 \\ -x_2 - 6x_4' + 6x_4'' \leq -8 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4',\ x_4'' \geq 0. \end{cases}$$

L'application des formules du cours 4 nous donne alors le programme dual :
Minimiser $4y_1 - 7y_2 + 6y_3' - 6y_3'' - 8y_4$
Sous les contraintes :

$$\begin{cases} y_1 - y_2 & \geq 3 \\ 2y_1 + y_3' - y_3'' - y_4 & \geq 2 \\ - y_2 + 3y_3' - 3y_3'' & \geq -7 \\ 4y_3' - 4y_3'' - 6y_4 & \geq 5 \\ - 4y_3' + 4y_3'' + 6y_4 & \geq -5 \\ y_1,\ y_2,\ y_3',\ y_3'',\ y_4 \geq 0. \end{cases}$$

En remplaçant $y_3' - y_3''$ par y_3 et en transformant les 2 dernières inégalités en une seule égalité, on obtient :

Minimiser $4y_1 - 7y_2 + 6y_3 - 8y_4$
Sous les contraintes :

$$\begin{cases} y_1 - y_2 & \geq 3 \\ 2y_1 + y_3 - y_4 & \geq 2 \\ - y_2 + 3y_3 & \geq -7 \\ 4y_3 - 6y_4 & = 5 \\ y_1,\ y_2,\ y_4 \geq 0. \end{cases}$$

Q 4.2 Appliquez une itération de l'algorithme du simplexe sur ce problème en utilisant la règle « plus grand coefficient ».

On commence par introduire des variables d'écart et changer le problème de minimisation en maximisation :
Maximiser $-4y_1 + 7y_2 - 6y_3 + 8y_4$
Sous les contraintes :

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - y_5 & = 3 \\ 2y_1 + y_3 - y_4 - y_6 & = 2 \\ - y_2 + 3y_3 - y_7 & = -7 \\ 4y_3 - 6y_4 & = 5 \\ y_1,\ y_2,\ y_4 \geq 0. \end{cases}$$

Sur les 2 premières égalités, on voit que (y_1, y_6) va pouvoir faire partie d'une base réalisable. Par ailleurs, les 2 dernières égalités suggèrent d'ajouter (y_3, y_7) à cette base. On peut donc partir de la base (y_1, y_6, y_7, y_3) et donc exprimer à la fois la fonction objectif et les contraintes en fonction des variables hors base :

$$\begin{array}{rl} y_1 - y_2 - y_5 & = 3 \\ 2y_2 + \frac{1}{2}y_4 + 2y_5 - y_6 & = -\frac{21}{4} \\ - y_2 + \frac{9}{4}y_4 - y_7 & = -\frac{43}{4} \\ 4y_3 - 6y_4 & = 5 \\ -z + 3y_2 - y_4 - 4y_5 & = -\frac{9}{2} \end{array}$$

La règle du plus grand coefficient nous indique de faire rentrer en base y_2. On doit alors faire ressortir y_7. On obtient alors le tableau suivant :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
y_1 & & & - & \frac{9}{4}y_4 & - & y_5 & & & + & y_7 & = & \frac{55}{4} \\
 & & & - & 5y_4 & - & 2y_5 & + & y_6 & - & 2y_7 & = & -\frac{107}{4} \\
 & y_2 & & - & \frac{9}{4}y_4 & & & & & + & y_7 & = & \frac{43}{4} \\
 & & 4y_3 & - & 6y_4 & & & & & & & = & 5 \\
-z & & & & \frac{23}{4}y_4 & - & 4y_5 & & & - & 3y_7 & = & -\frac{145}{4}
\end{array}$$

Exercice 5 (4 points) — *Programmation non linéaire*

Soit le programme : Maximiser $x_2^2 - 2x_1 - x_1^2$

Sous la contrainte : $x_1^2 + x_2^2 \le 1$

Ce programme a été résolu par un ordinateur en utilisant un certain algorithme de recherche. En fonction du point de départ, l'algorithme a convergé vers 4 points différents :

(1) $x_1 = 1.000$, $x_2 = 0.000$;

(2) $x_1 = -1.000$, $x_2 = 0.000$;

(3) $x_1 = -0.500$, $x_2 = 0.866$;

(4) $x_1 = -0.500$, $x_2 = -0.866$;

Q 5.1 Les conditions de Kuhn et Tucker sont-elles satisfaites sur ces différents points ?

Tout d'abord, pour « coller » au cours, nous allons traduire le programme d'optimisation en un programme de minimisation :

Minimiser $-x_2^2 + 2x_1 + x_1^2$

Sous la contrainte : $x_1^2 + x_2^2 \le 1$

Notons que, sur l'ensemble des 4 points testés, $g(x) \approx 0$, l'approximation étant due à l'imprécision de la machine. Par conséquent, seule la condition $\vec{\nabla} f(x) + \lambda \vec{\nabla} g(x) = 0$ doit être testée.

$\vec{\nabla} f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla} g(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$. Les conditions à tester sont donc :

(1) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, qui ne peut être vérifiée pour $\lambda \ge 0$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, qui est vérifiée pour $\lambda = 0$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1,732 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1,732 \end{pmatrix} = 0$, qui est vérifiée pour $\lambda = 1$.

(4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1,732 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1,732 \end{pmatrix} = 0$, qui est vérifiée pour $\lambda = 1$.

Q 5.2 Ces points peuvent-ils être optimaux ?

Ici, l'hypothèse de qualification des contraintes est trivialement vérifiée. Donc les conditions de Kuhn et Tucker sont nécessaires pour être optimum local. Par conséquent, le point (1) ne peut être optimal. En revanche, les points (1), (2) et (3) peuvent être des optima locaux. Mais seuls les points (3) et (4) sont des optima globaux du problème. Pour montrer cela, il suffit de voir que, quel que soit le point x à l'intérieur de l'ellipse, le point y obtenu en translatant le plus possible vers la gauche x tout en restant sur l'ellipse a une valeur de fonction objectif plus élevée. Si l'on est sur l'ellipse, alors $x_2^2 = 1 - x_1^2$ et donc on veut minimiser sur $[-1, 1]$ la fonction $f(x_1) = -1 + 2x_1 + 2x_1^2$. Or cette fonction atteint son min en $x_1 = -1/2$.