ISUP – Examen d'optimisation

Durée : 2 heures 30

Exercice 1 (4 points) — *Résolution graphique d'un problème linéaire*

Soit le programme linéaire sous forme standard :

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & 4x_1 + x_2 & & \\
s.c. & x_1 - 8x_2 & \leq & 2 \\
& x_1 - 4x_2 & \leq & 4 \\
& x_1 - 2x_2 & \leq & 8 \\
& x_1 - x_2 & \leq & 11 \\
& 7x_1 - 2x_2 & \leq & 107 \\
& 2x_2 & \leq & 19 \\
& -3x_1 + 4x_2 & \leq & 8 \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Q 1.1 Sachant que les solutions réalisables du problème ci-dessus ont toutes des coordonnées (x_1, x_2) inférieures respectivement à 20 et à 10, dessinez l'ensemble des solutions réalisables de ce problème dans le plan $X_1 \times X_2$. Sur ce dessin, tracez avec une flèche la direction de la fonction objectif.

Q 1.2 Sur le dessin ci-dessus, en partant de la solution réalisable $(0, 0)$, indiquez quels sont les points obtenus lors des différentes itérations du simplexe si l'on applique la règle du « plus grand accroissement de z ». Vous nommerez ces points A, B, C, etc.

Q 1.3 Déterminez graphiquement la solution optimale. Écrivez le système d'équations permettant d'obtenir cet optimum. Quelle est la valeur de la fonction objectif à cet optimum ?

Exercice 2 (4 points) — *Modélisation d'un problème d'optimisation*

En France, les besoins en électricité peuvent être grossièrement décrits par trois paramètres :
- la puissance moyenne nécessaire pendant les journées d'hiver (puissance garantie) notée A ;
- la puissance électrique demandée à l'instant de consommation maximale au cours de l'année (puissance de pointe), notée B ;
- l'énergie totale annuelle, notée C.

Pour satisfaire ces besoins, EDF dispose de plusieurs types d'usines, qui peuvent être regroupées en 7 catégories relativement homogènes :

1. les centrales thermiques classiques à combustible fossile ;
2. les centrales équipées de turbines à gaz ;
3. les centrales nucléaires ;
4. les centrales hydro-électriques au fil de l'eau ;
5. les centrales hydro-électriques à petit réservoir ;
6. les centrales hydro-électriques à grand réservoir ;
7. les usines marémotrices.

Soit a_i, b_i, c_i les contributions d'une usine de la catégorie i ($i = 1, 2, \ldots, 7$) aux besoins A, B et C respectivement. Soit d_i le coût d'investissement d'une usine de type i, f_i son coût de fonctionnement. Soit X_i le nombre déjà existant en France d'usines de type i et x_i le nombre d'usines de type i à construire pour assurer la demande énergétique (A, B, C). Les entreprises de construction ayant

des capacités limitées, on ne peut construire plus de L_i usines de type i. Par ailleurs, les ressources pécuniaires d'EDF sont limitées à D (en €) en ce qui concerne les investissements pour construire de nouvelles usines.
Quel problème d'optimisation obtient-on si l'on veut minimiser les coûts d'investissement et de fonctionnement, tout en satisfaisant les demandes électriques A, B et C ?

Exercice 3 (3 points) — *Algorithme du simplexe*

Soit le problème linéaire :
Maximiser $-3x_1 - 7x_3 - 2x_4 - 6x_6$
Sous les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ -x_1 - x_2 + x_6 = 10 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Q 3.1 Déterminez une base réalisable de ce problème.

Q 3.2 Cette base est-elle optimale ? (justifiez votre réponse). Le cas échéant, donnez la valeur de la fonction objectif à l'optimum. Sinon, effectuez une itération su simplexe avec la règle du « plus grand coefficient ».

Exercice 4 (5 points) — *Dualité*

Soit le programme linéaire :
Maximiser $3x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 5x_4$
Sous les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_3 \geq 7 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6 \\ x_2 + 6x_4 \geq 8 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Q 4.1 Déterminez le dual de ce programme linéaire.

Q 4.2 Appliquez une itération de l'algorithme du simplexe sur ce problème en utilisant la règle « plus grand coefficient ».

Exercice 5 (4 points) — *Programmation non linéaire*

Soit le programme : Maximiser $x_2^2 - 2x_1 - x_1^2$
Sous la contrainte : $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$

Ce programme a été résolu par un ordinateur en utilisant un certain algorithme de recherche. En fonction du point de départ, l'algorithme a convergé vers 4 points différents :

(1) $x_1 = 1.000$, $x_2 = 0.000$;
(2) $x_1 = -1.000$, $x_2 = 0.000$;
(3) $x_1 = -0.500$, $x_2 = 0.866$;
(4) $x_1 = -0.500$, $x_2 = -0.866$;

Q 5.1 Les conditions de Kuhn et Tucker sont-elles satisfaites sur ces différents points ?

Q 5.2 Ces points peuvent-ils être optimaux ?