Exercice ??? (??? points)

Soit le programme linéaire

$$
\text{PL} \; : \quad
\begin{array}{l}
MIN \quad x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 - 5x_6 \\
\left|
\begin{array}{l}
2x_1 + 6x_3 - 7x_4 + 7x_5 - 2x_6 = 14 \\
3x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 6x_4 + 6x_5 = 18 \\
3x_1 - 4x_2 + 15x_3 + 3x_4 + 15x_5 + 3x_6 = 15 \\
x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,3,4,5,6
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

1°) On cherche une solution réalisable de PL en appliquant l'algorithme du simplexe (Phase I, puis Phase II) avec les règles de Dantzig (on appellera x_7, x_8, x_9 les variables artificielles et PL^* le programme à résoudre en PhaseI) ; on montrera successivement que :

a) $B^0 = \{2,3,8\}$ est une base optimale de PL^*, mais n'est pas une base de PL ;

b) $B = \{2,3,4\}$ est une base réalisable de PL ;

c) l'observation de la colonne d'indice 6 du tableau du simplexe de base B permet de conclure que PL n'est pas borné.

2°) On remplace PL par PL', qui a les mêmes contraintes mais une fonction-objectif différente, $c'.x$, avec $\quad c' = \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$.

Que doit-on modifier dans le tableau du simplexe de base B de PL pour obtenir celui associé à PL' ? Trouver une solution optimale de PL' en appliquant directement la Phase II de l'algorithme du simplexe à partir de ce tableau..

3°) a) Ecrire le dual $\text{PL}^{2\prime}$de PL'.

b) Montrer que l'on obtient une solution optimale (υ^*, d^*) de $\text{PL}^{2\prime}$à partir de d^*, fourni par le dernier tableau (de base B^*), et de υ^*, solution du système : $\upsilon^*.A^{B^*} = c'^{B^*}$. Trouver cette solution.