MAITRISE D'INFORMATIQUE

Tronc Commun
EXAMEN D'ALGORITHMIQUE NUMÉRIQUE
Janvier 2001

Exercice 1 (5 points)
1) Inverser par la méthode de Gauss-Jordan la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2) On veut résoudre par une méthode itérative le système $Bx = b$ où.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Soit $C = A - B$. Donner une expression de x en fonction de A^{-1}, C, x et b.

b) En déduire une méthode itérative de résolution du système $Bx = b$ utilisant une suite (x^k) : donner la formule itérative exprimant x^{k+1} en fonction de x^k.

c) Soit $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer x^1, x^2 et x^3.

d) La suite (x^k) converge-t-elle? Pourquoi ?

Exercice 2 (7 points)

Soit le programme linéaire PL^0 :

$$\begin{array}{l} MIN\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 + x_5 \\ \left| \begin{array}{rl} 3x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 + 2x_5 & \leqq 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 & = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,3,4,5 & \end{array} \right. \end{array} .$$

.

1°) Mettre PL^0 sous forme standard, PL^1, en introduisant une variable d'écart x_6.

Montrer que $B = \{3, 5, 6\}$ est une base réalisable de PL^1.

2°) Calculer les éléments $T, t, \bar{d}$ et $-\bar{f}$ du tableau du simplexe de base B :

$$\begin{bmatrix} T & t \\ \bar{d} & -\bar{f} \end{bmatrix}$$

3°) Résoudre PL[1] en appliquant directement la Phase II de l'algorithme du simplexe à partir du tableau de base B.

4°) a) Ecrire le dual PL[2] de PL[1].

b) Montrer que l'on obtient une solution optimale (υ^*, d^*) de PL[2] à partir de d^*, fourni par le dernier tableau (de base B^*), et de υ^*, solution du système : $\upsilon^*.A^{B^*} = c^{B^*}$. Trouver cette solution.

.

Exercice 3 (3 points)

Soit les fonctions d'une variable
$G(x) = x^4 - 4x^2 + 8x + 1$ et $g(x) = x^3 - 2x + 2$.

1°) Montrer que les points stationnaires de G sont les racines de $g(x) = 0$.

2°) Rechercher une racine de $g(x) = 0$ par la méthode de Newton avec successivement :

- $x_0 = -2$
- $x_0 = 1$

Dans chaque cas, calculer les trois termes suivants de la suite et indiquer son comportement (on ne demande pas de démontrer de convergence).

3°) En déduire une estimation d'un minimum local de la fonction $G(x)$.

Exercice 4 (5 points)

Soit la fonction de deux variables $f(x) = \frac{1}{2}{}^\tau x.C.x + p.x$

avec $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $p = \begin{bmatrix} -3 & -3 \end{bmatrix}$.

1°) a) Montrer que C est définie positive.

b) Vérifier que

$$f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 3x_2$$

et calculer le gradient, $g(x)$, de f en x.

c) En quel point $\hat{x}$ la fonction f passe-t-elle par un minimum?

2°) a) Partant de $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dans la direction, $\delta^{(1)}$, de l'anti-gradient, déterminer le point $x^{(1)} = x^{(0)} + \hat{\lambda}.\delta^{(1)}$ où $\hat{\lambda}$ minimise $\varphi(\lambda) = f(x^{(0)} + \lambda.\delta^{(1)})$.

b) A quel point $x^{(2)}$ arrive-t-on si l'on réitère ce qui précède en prenant à nouveau en $x^{(1)}$ la direction de l'anti-gradient?

c) A quel point arrive-t-on si l'on prend au contraire en $x^{(1)}$ la direction du gradient conjugué

$$\delta^{(2)} = -g(x^{(1)}) + \beta.\delta^{(1)} \qquad \text{avec} \qquad \beta = \frac{{}^\tau g(x^{(1)}).g(x^{(1)})}{{}^\tau g(x^{(0)}).g(x^{(0)})} \text{ ?}$$

Vérifier cette affirmation par le calcul.