Cours 14 : Optimisation quadratique

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

Programmation quadratique

Définition d'un programme quadratique

$$\min Q(x) = \frac{1}{2}x^T Cx + p^T x$$

$$s.c. \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

avec C symétrique semi-définie positive

Rappel : matrice semi-définie positive

- Matrice C carrée $n \times n$
- C est symétrique : $C = C^T$, i.e., $C_{jk} = C_{kj}\ \forall j, k$
- $x^T Cx \geq 0\ \forall x$

C semi-définie positive $\Longrightarrow$ Q convexe

Q convexe $\Longrightarrow$ optimum local = optimum global

méthode de Rosen $\Longrightarrow$ optimum global

Conditions de Kuhn et Tucker pour la prog quadratique

$$\min Q(x) = \frac{1}{2}x^T Cx + p^T x$$
$$s.c. \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Conditions de Kuhn et Tucker pour ce problème

- $Ax = b$
- $Cx - v + A^T u = -p$
- $x \geq 0, \quad v \geq 0$
- $x^T v = 0$

⚠ Les conditions de Kuhn et Tucker diffèrent du cours 9 car contraintes $Ax = b$ et non($Ax \leq b$)

⚠ à part $x^T v = 0$, les autres équations sont linéaires résolution par simplexe ? $\Longrightarrow$ méthode de Wolfe (1959)

Méthode de Wolfe

$$\min Q(x) = \frac{1}{2}x^T C x + p^T x$$
$$s.c. \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

2 formes pour la méthode de Wolfe : la courte et la longue

formes de la méthode de Wolfe

- *forme courte* :

  Suppose que $p = 0$ ou C définie positive

- *forme longue* :

  Pas de contrainte sur p ou C

  Revient à appliquer 2 fois la forme courte

⚠ dans la suite du cours, étude de la forme courte

Méthode de Wolfe – forme courte (1/8)

$$\min Q(x) = \tfrac{1}{2}x^T C x + p^T x \qquad s.c. \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & Ax = b \\ & Cx - v + A^T u = -p \\ & x \geq 0, \quad v \geq 0 \\ & x^T v = 0 \end{aligned}$$

Idée de la méthode de Wolfe

- ajout de variables artificielles $\Longrightarrow$ solution réalisable des conditions de Kuhn et Tucker
- suppression de ces variables via l'algorithme du simplexe $\Longrightarrow$ similaire à une Phase I du simplexe excepté qu'on rajoute une règle pour assurer que $x^T v = 0$

Kuhn et Tucker : $\begin{cases} Ax = b \\ Cx - v + A^T u = -p \\ x \geq 0, \quad v \geq 0 \\ x^T v = 0 \end{cases}$

Vers une solution réalisable :

introduire des variables artificielles :

$$w^T = (w_1, \ldots, w_m) \qquad z^{1\,T} = (z_1^1, \ldots, z_n^1) \qquad z^{2\,T} = (z_1^2, \ldots, z_n^2)$$

$\Longrightarrow$ nouveau système élargi :

$$\begin{cases} Ax + w = b \\ Cx - v + A^T u + z^1 - z^2 = -p \\ x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad z^1 \geq 0, \quad z^2 \geq 0, \quad w \geq 0 \\ x^T v = 0 \end{cases}$$

Méthode de Wolfe – forme courte (3/8)

$$\begin{cases} Ax + w = b \\ Cx - v + A^T u + z^1 - z^2 = -p \\ x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad z^1 \geq 0, \quad z^2 \geq 0, \quad w \geq 0 \\ x^T v = 0 \end{cases}$$

Solution évidente du système :

$$\begin{cases} x = 0, \quad v = 0, \quad u = 0 \\ w = b \\ z_i^1 = -p_i \text{ si } p_i \text{ négatif} \\ z_i^2 = \quad p_i \text{ si } p_i \text{ positif} \end{cases}$$

Méthode de Wolfe :
élimination des z_i^j et des w_i de la base

base réalisable : les w_i, les z_i^1 ou z_i^2 non nuls

⚠ si $p_i = 0$, z_i^1 ou z_i^2 entre en base (peu importe lequel)

Méthode de Wolfe – forme courte (4/8)

élimination des w_i :

Partir de la solution du transparent précédent et résoudre :

$$\min \sum_{i=1}^{m} w_i$$

$$s.c. \quad \begin{cases} Ax + w = b \\ Cx - v + A^T u + z^1 - z^2 = -p \\ x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad z^1 \geq 0, \quad z^2 \geq 0, \quad w \geq 0 \\ x^T v = 0 \end{cases}$$

- ⚠ Dans cette phase de la méthode, on conserve toujours $u = 0$ et $v = 0$, i.e., les u_i et les v_i restent hors base
- ⚠ problème d'origine = contraintes incompatibles $\Longrightarrow \hat{w} \neq 0$
- ⚠ si dégénérescence, faire attention à sortir les $w_i = 0$ de la base

Méthode de Wolfe – forme courte (5/8)

fin de la phase précédente :

base = m variables x_i et n variables z_i^1 ou z_i^2

2ème phase : élimination des z_i^j

on supprime du système les colonnes relatives aux w_i et aux z_i^j qui ne sont pas en base $\Longrightarrow$ nouveau système :

$$\begin{cases} Ax = b \\ Cx - v + A^T u + Dz = -p \\ x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad z \geq 0 \\ x^T v = 0 \end{cases}$$

où $z =$ vecteur des z_i^j encore en base

$D =$ matrice diagonale : 1 pour les z_i^1 et des -1 pour les z_i^2

Méthode de Wolfe – forme courte (6/8)

Actuellement : solution réalisable du système avec $u = 0$ et $v = 0$

réalisation de la 2ème phase :

minimiser $\sum_i z_i$ tout en préservant $x^T v = 0$

$\Longrightarrow$ utilisation du simplexe en ajoutant la règle :

Règle supplémentaire de pivotage du simplexe

- Si x_i se trouve en base, v_i ne peut rentrer en base
- Si v_i se trouve en base, x_i ne peut rentrer en base

Si on trouve $\sum_i \hat{z}_i = 0$ alors programme quadratique résolu

Problème : se peut-il que la nouvelle règle de pivotage empêche tout pivotage alors que $\sum_i \hat{z}_i > 0$?

Lemme

- Soit q un vecteur de taille h
- Soit (G, H) une partition de $\{1, \ldots, n\}$
- Soit le programme linéaire en w :

$$\min q^T w$$

$$s.c. \quad \begin{cases} Ax = b \\ Cx - v + A^T u + Rw = f \\ x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad w \geq 0, \quad v_G = 0, \quad x_H = 0 \end{cases}$$

- $\hat{w}$: solution optimale du programme linéaire
- alors il existe un vecteur r tel que :

$$Cr = 0 \qquad Ar = 0 \qquad q^T \hat{w} = f^T r$$

Application à notre problème :

$$\begin{cases} w = z \\ q^T = (1, 1, \ldots, 1) \\ q^T w = \sum_i z_i, \qquad R = D, \qquad f = -p \end{cases}$$

Méthode de Wolfe – forme courte (8/8)

lemme précédent $\Longrightarrow \exists r$ tel que :

$$Cr = 0 \qquad \text{et} \qquad min \sum_i z_i = -p^T r$$

Or hypothèse de la méthode courte : $p = 0$ ou C définie positive

$$p = 0 \Longrightarrow \sum_i z_i = 0$$

$$C \text{ définie positive} \Longrightarrow r = 0 \Longrightarrow \sum_i z_i = 0$$

Donc, dans tous les cas, $\sum_i z_i = 0$

> La méthode de Wolfe (forme courte) résout le problème quadratique d'origine