

# Cours 14 : Optimisation quadratique

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

## *Définition d'un programme quadratique*

$$\min Q(x) = \frac{1}{2}x^T Cx + p^T x$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

avec  $C$  symétrique semi-définie positive

## *Rappel : matrice semi-définie positive*

- Matrice  $C$  carrée  $n \times n$
- $C$  est symétrique :  $C = C^T$ , i.e.,  $C_{jk} = C_{kj} \forall j, k$
- $x^T Cx \geq 0 \forall x$

## Définition d'un programme quadratique

$$\min Q(x) = \frac{1}{2}x^T Cx + p^T x$$

$$\text{s.c. } \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

avec  $C$  symétrique semi-définie positive

## Rappel : matrice semi-définie positive

- Matrice  $C$  carrée  $n \times n$
- $C$  est symétrique :  $C = C^T$ , i.e.,  $C_{jk} = C_{kj} \forall j, k$
- $x^T Cx \geq 0 \forall x$

$C$  semi-définie positive  $\implies Q$  convexe

$Q$  convexe  $\implies$  optimum local = optimum global

## Définition d'un programme quadratique

$$\min Q(x) = \frac{1}{2}x^T Cx + p^T x$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

avec  $C$  symétrique semi-définie positive

## Rappel : matrice semi-définie positive

- Matrice  $C$  carrée  $n \times n$
- $C$  est symétrique :  $C = C^T$ , i.e.,  $C_{jk} = C_{kj} \forall j, k$
- $x^T Cx \geq 0 \forall x$

$C$  semi-définie positive  $\implies Q$  convexe

$Q$  convexe  $\implies$  optimum local = optimum global

méthode de Rosen  $\implies$  optimum global

$$\begin{aligned} \min Q(x) &= \frac{1}{2}x^T Cx + p^T x \\ \text{s.c. } &\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## Conditions de Kuhn et Tucker pour ce problème

- $Ax = b$
- $Cx - v + A^T u = -p$
- $x \geq 0, \quad v \geq 0$
- $x^T v = 0$



Les conditions de Kuhn et Tucker diffèrent du cours 9 car contraintes  $Ax = b$  et non( $Ax \leq b$ )

# Conditions de Kuhn et Tucker pour la prog quadratique

$$\begin{aligned} \min Q(x) &= \frac{1}{2}x^T Cx + p^T x \\ \text{s.c. } &\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## Conditions de Kuhn et Tucker pour ce problème

- $Ax = b$
- $Cx - v + A^T u = -p$
- $x \geq 0, \quad v \geq 0$
- $x^T v = 0$



Les conditions de Kuhn et Tucker diffèrent du cours 9 car contraintes  $Ax = b$  et non( $Ax \leq b$ )



à part  $x^T v = 0$ , les autres équations sont linéaires  
résolution par simplexe ?

# Conditions de Kuhn et Tucker pour la prog quadratique

$$\begin{aligned} \min Q(x) &= \frac{1}{2}x^T Cx + p^T x \\ \text{s.c. } &\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## Conditions de Kuhn et Tucker pour ce problème

- $Ax = b$
- $Cx - v + A^T u = -p$
- $x \geq 0, \quad v \geq 0$
- $x^T v = 0$



Les conditions de Kuhn et Tucker diffèrent du cours 9 car contraintes  $Ax = b$  et non  $(Ax \leq b)$



à part  $x^T v = 0$ , les autres équations sont linéaires  
résolution par simplexe ?  $\implies$  méthode de Wolfe (1959)

$$\begin{aligned} \min Q(x) &= \frac{1}{2}x^T Cx + p^T x \\ \text{s.c. } &\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2 formes pour la méthode de Wolfe : la courte et la longue

## *formes de la méthode de Wolfe*

- *forme courte* :

Suppose que  $p = 0$  ou  $C$  **définie** positive

- *forme longue* :

Pas de contrainte sur  $p$  ou  $C$

Revient à appliquer 2 fois la forme courte



dans la suite du cours, étude de la forme courte



$$\begin{array}{l} \min Q(x) = \frac{1}{2}x^T Cx + p^T x \\ \text{s.c.} \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} Ax = b \\ Cx - v + A^T u = -p \\ x \geq 0, \quad v \geq 0 \\ x^T v = 0 \end{array} \right.$$

## *Idée de la méthode de Wolfe*

- ajout de variables artificielles  $\implies$  solution réalisable des conditions de Kuhn et Tucker
- suppression de ces variables via l'algorithme du simplexe  $\implies$  similaire à une Phase I du simplexe excepté qu'on rajoute une règle pour assurer que  $x^T v = 0$

$$\text{Kuhn et Tucker : } \begin{cases} Ax = b \\ Cx - v + A^T u = -p \\ x \geq 0, \quad v \geq 0 \\ x^T v = 0 \end{cases}$$

Vers une solution réalisable :

introduire des variables artificielles :

$$w^T = (w_1, \dots, w_m) \quad z^1{}^T = (z_1^1, \dots, z_n^1) \quad z^2{}^T = (z_1^2, \dots, z_n^2)$$

⇒ nouveau système élargi :

$$\begin{cases} Ax + w = b \\ Cx - v + A^T u + z^1 - z^2 = -p \\ x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad z^1 \geq 0, \quad z^2 \geq 0, \quad w \geq 0 \\ x^T v = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ax + w = b \\ Cx - v + A^T u + z^1 - z^2 = -p \\ x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad z^1 \geq 0, \quad z^2 \geq 0, \quad w \geq 0 \\ x^T v = 0 \end{cases}$$

Solution évidente du système :


$$\begin{cases} x = 0, \quad v = 0, \quad u = 0 \\ w = b \\ z_i^1 = -p_i \text{ si } p_i \text{ négatif} \\ z_i^2 = p_i \text{ si } p_i \text{ positif} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ax + w = b \\ Cx - v + A^T u + z^1 - z^2 = -p \\ x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad z^1 \geq 0, \quad z^2 \geq 0, \quad w \geq 0 \\ x^T v = 0 \end{cases}$$

Solution évidente du système :

$$\begin{cases} x = 0, \quad v = 0, \quad u = 0 \\ w = b \\ z_i^1 = -p_i \text{ si } p_i \text{ négatif} \\ z_i^2 = p_i \text{ si } p_i \text{ positif} \end{cases}$$

base réalisable : les  $w_i$ , les  $z_i^1$  ou  $z_i^2$  non nuls

 si  $p_i = 0$ ,  $z_i^1$  ou  $z_i^2$  entre en base (peu importe lequel)

## Méthode de Wolfe – forme courte (3/8)

$$\begin{cases} Ax + w = b \\ Cx - v + A^T u + z^1 - z^2 = -p \\ x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad z^1 \geq 0, \quad z^2 \geq 0, \quad w \geq 0 \\ x^T v = 0 \end{cases}$$

Solution évidente du système :

$$\begin{cases} x = 0, \quad v = 0, \quad u = 0 \\ w = b \\ z_i^1 = -p_i \text{ si } p_i \text{ négatif} \\ z_i^2 = p_i \text{ si } p_i \text{ positif} \end{cases}$$

*Méthode de Wolfe :*  
élimination des  $z_i^j$  et  
des  $w_i$  de la base

base réalisable : les  $w_i$ , les  $z_i^1$  ou  $z_i^2$  non nuls



si  $p_i = 0$ ,  $z_i^1$  ou  $z_i^2$  entre en base (peu importe lequel)

élimination des  $w_i$  :

Partir de la solution du transparent précédent et résoudre :

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m w_i \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} Ax + w = b \\ Cx - v + A^T u + z^1 - z^2 = -p \\ x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad z^1 \geq 0, \quad z^2 \geq 0, \quad w \geq 0 \\ x^T v = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## élimination des $w_i$ :

Partir de la solution du transparent précédent et résoudre :

$$\min \sum_{i=1}^m w_i$$
$$\text{s.c.} \begin{cases} Ax + w = b \\ Cx - v + A^T u + z^1 - z^2 = -p \\ x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad z^1 \geq 0, \quad z^2 \geq 0, \quad w \geq 0 \\ x^T v = 0 \end{cases}$$



Dans cette phase de la méthode, on conserve toujours  $u = 0$  et  $v = 0$ , i.e., les  $u_i$  et les  $v_i$  restent hors base

## élimination des $w_i$ :

Partir de la solution du transparent précédent et résoudre :

$$\min \sum_{i=1}^m w_i$$
$$\text{s.c.} \begin{cases} Ax + w = b \\ Cx - v + A^T u + z^1 - z^2 = -p \\ x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad z^1 \geq 0, \quad z^2 \geq 0, \quad w \geq 0 \\ x^T v = 0 \end{cases}$$



Dans cette phase de la méthode, on conserve toujours  $u = 0$  et  $v = 0$ , i.e., les  $u_i$  et les  $v_i$  restent hors base




problème d'origine = contraintes incompatibles  $\implies \hat{w} \neq 0$



## élimination des $w_i$ :

Partir de la solution du transparent précédent et résoudre :

$$\min \sum_{i=1}^m w_i$$
$$\text{s.c.} \begin{cases} Ax + w = b \\ Cx - v + A^T u + z^1 - z^2 = -p \\ x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad z^1 \geq 0, \quad z^2 \geq 0, \quad w \geq 0 \\ x^T v = 0 \end{cases}$$

 Dans cette phase de la méthode, on conserve toujours  $u = 0$  et  $v = 0$ , i.e., les  $u_i$  et les  $v_i$  restent hors base

 problème d'origine = contraintes incompatibles  $\implies \hat{w} \neq 0$

 si dégénérescence, faire attention à sortir les  $w_i = 0$  de la base

## Méthode de Wolfe – forme courte (5/8)

fin de la phase précédente :

base =  $m$  variables  $x_i$  et  $n$  variables  $z_i^1$  ou  $z_i^2$

fin de la phase précédente :

base =  $m$  variables  $x_i$  et  $n$  variables  $z_i^1$  ou  $z_i^2$

2ème phase : élimination des  $z_i^j$

on supprime du système les colonnes relatives aux  $w_i$  et aux  $z_i^j$  qui ne sont pas en base  $\implies$  nouveau système :

$$\begin{cases} Ax = b \\ Cx - v + A^T u + Dz = -p \\ x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad z \geq 0 \\ x^T v = 0 \end{cases}$$

où  $z$  = vecteur des  $z_i^j$  encore en base

$D$  = matrice diagonale : 1 pour les  $z_i^1$  et des  $-1$  pour les  $z_i^2$

# Méthode de Wolfe – forme courte (6/8)

**Actuellement** : solution réalisable du système avec  $u = 0$  et  $v = 0$

réalisation de la 2ème phase :

minimiser  $\sum_i z_i$  tout en préservant  $x^T v = 0$

⇒ utilisation du simplexe en ajoutant la règle :

*Règle supplémentaire de pivotage du simplexe*

- Si  $x_i$  se trouve en base,  $v_i$  ne peut rentrer en base
- Si  $v_i$  se trouve en base,  $x_i$  ne peut rentrer en base

# Méthode de Wolfe – forme courte (6/8)

**Actuellement** : solution réalisable du système avec  $u = 0$  et  $v = 0$

réalisation de la 2ème phase :

minimiser  $\sum_i z_i$  tout en préservant  $x^T v = 0$

⇒ utilisation du simplexe en ajoutant la règle :

*Règle supplémentaire de pivotage du simplexe*

- Si  $x_i$  se trouve en base,  $v_i$  ne peut rentrer en base
- Si  $v_i$  se trouve en base,  $x_i$  ne peut rentrer en base

Si on trouve  $\sum_i \hat{z}_i = 0$  alors programme quadratique résolu

# Méthode de Wolfe – forme courte (6/8)

**Actuellement** : solution réalisable du système avec  $u = 0$  et  $v = 0$

réalisation de la 2ème phase :

minimiser  $\sum_i z_i$  tout en préservant  $x^T v = 0$

⇒ utilisation du simplexe en ajoutant la règle :

*Règle supplémentaire de pivotage du simplexe*

- Si  $x_i$  se trouve en base,  $v_i$  ne peut rentrer en base
- Si  $v_i$  se trouve en base,  $x_i$  ne peut rentrer en base

Si on trouve  $\sum_i \hat{z}_i = 0$  alors programme quadratique résolu

**Problème** : se peut-il que la nouvelle règle de pivotage empêche tout pivotage alors que  $\sum_i \hat{z}_i > 0$  ?

## Lemme

- Soit  $q$  un vecteur de taille  $h$
- Soit  $(G, H)$  une partition de  $\{1, \dots, n\}$
- Soit le programme linéaire en  $w$  :

$$\min q^T w$$

$$\text{s.c. } \begin{cases} Ax = b \\ Cx - v + A^T u + R w = f \\ x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad w \geq 0, \quad v_G = 0, \quad x_H = 0 \end{cases}$$

- $\hat{w}$  : solution optimale du programme linéaire
- alors il existe un vecteur  $r$  tel que :

$$Cr = 0 \quad Ar = 0 \quad q^T \hat{w} = f^T r$$

# Méthode de Wolfe – forme courte (7/8)

## Lemme

- Soit  $q$  un vecteur de taille  $h$
- Soit  $(G, H)$  une partition de  $\{1, \dots, n\}$
- Soit le programme linéaire en  $w$  :

$$\min q^T w$$

$$\text{s.c. } \begin{cases} Ax = b \\ Cx - v + A^T u + R w = f \\ x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad w \geq 0, \quad v_G = 0, \quad x_H = 0 \end{cases}$$

- $\hat{w}$  : solution optimale du programme linéaire
- alors il existe un vecteur  $r$  tel que :

$$Cr = 0 \quad Ar = 0 \quad q^T \hat{w} = f^T r$$

Application à notre problème :

$$\begin{cases} w = z \\ q^T = (1, 1, \dots, 1) \\ q^T w = \sum_i z_i, \quad R = D, \quad f = -p \end{cases}$$



lemme précédent  $\implies \exists r$  tel que :

$$Cr = 0 \quad \text{et} \quad \min_i z_i = -p^T r$$

## Méthode de Wolfe – forme courte (8/8)

lemme précédent  $\implies \exists r$  tel que :

$$Cr = 0 \quad \text{et} \quad \min_i z_i = -p^T r$$

Or hypothèse de la méthode courte :  $p = 0$  ou  $C$  définie positive

## Méthode de Wolfe – forme courte (8/8)

lemme précédent  $\implies \exists r$  tel que :

$$Cr = 0 \quad \text{et} \quad \min \sum_i z_i = -p^T r$$

Or hypothèse de la méthode courte :  $p = 0$  ou  $C$  définie positive

$$p = 0 \implies \sum_i z_i = 0$$

$$C \text{ définie positive} \implies r = 0 \implies \sum_i z_i = 0$$

## Méthode de Wolfe – forme courte (8/8)

lemme précédent  $\implies \exists r$  tel que :

$$Cr = 0 \quad \text{et} \quad \min \sum_i z_i = -p^T r$$

Or hypothèse de la méthode courte :  $p = 0$  ou  $C$  définie positive

$$p = 0 \implies \sum_i z_i = 0$$

$$C \text{ définie positive} \implies r = 0 \implies \sum_i z_i = 0$$

$$\text{Donc, dans tous les cas, } \sum_i z_i = 0$$

La méthode de Wolfe (forme courte) résout le problème quadratique d'origine