Cours 12 : Optimisation non linéaire sous contraintes

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

Problème à résoudre

Optimisation sous contraintes

- $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ fonction à minimiser
- $S \subseteq \mathbb{R}^n$
- Problème d'optimisation : $\min_{x \in S} f(x)$

Problème à résoudre

Optimisation sous contraintes

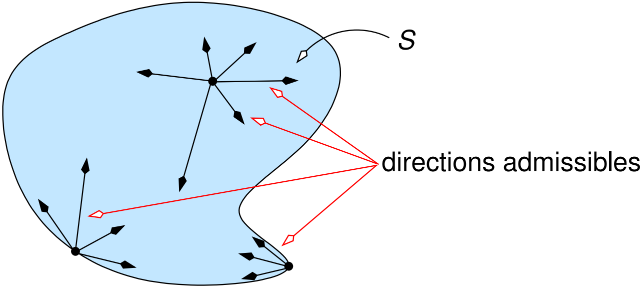
- $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ fonction à minimiser
- $S \subseteq \mathbb{R}^n$
- Problème d'optimisation : $\min_{x \in S} f(x)$

	f	S
prog linéaire	linéaire	polyèdre convexe
prog quadratique	forme quadratique semi définie positive	polyèdre convexe
prog convexe	convexe	ensemble convexe
prog non linéaire	quelconque	ensemble quelconque

Directions admissibles

Définition d'une direction admissible

- Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, \quad S \subseteq \mathbb{R}^n, \quad x \in S$
- d = direction admissible si $\exists \bar{\lambda} > 0$ t.q. :
  $x + \lambda d \in S \quad \forall 0 \leq \lambda \leq \bar{\lambda}$



Directions admissibles à l'optimum (1/2)

Proposition 1

- $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1
- $\widehat{x}$ minimum local de f sur S

$\Longrightarrow \forall$ direction admissible d en $\widehat{x}$, on a $\vec{\nabla} f(\widehat{x})^T d \geq 0$

Proposition 1

- $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1
- $\widehat{x}$ minimum local de f sur S

$\Longrightarrow \forall$ direction admissible d en $\widehat{x}$, on a $\vec{\nabla} f(\widehat{x})^T d \geq 0$

Corollaire

- $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1
- une condition nécessaire pour que $\widehat{x} \in S$ soit minimum local de f est que $\vec{\nabla} f(\widehat{x})^T d \geq 0$, $\forall$ direction admissible d en $\widehat{x}$

Directions admissibles à l'optimum (2/2)

Démonstration de la proposition :

d direction admissible en $\widehat{x} \Longrightarrow \exists \overline{\lambda} > 0$ t.q. $\widehat{x} + \lambda d \in S, \forall 0 \leq \lambda \leq \overline{\lambda}$

Directions admissibles à l'optimum (2/2)

Démonstration de la proposition :

d direction admissible en $\widehat{x} \Longrightarrow \exists \overline{\lambda} > 0$ t.q. $\widehat{x} + \lambda d \in S$, $\forall 0 \leq \lambda \leq \overline{\lambda}$

Soit $g(\lambda) = f(\widehat{x} + \lambda d)$

hypothèses $\Longrightarrow g$: minimum local en $\lambda = 0$

développement limité : $g(\lambda) = g(0) + \lambda g'(0) + o(\lambda)$

Directions admissibles à l'optimum (2/2)

Démonstration de la proposition :

d direction admissible en $\widehat{x} \Longrightarrow \exists \overline{\lambda} > 0$ t.q. $\widehat{x} + \lambda d \in S$, $\forall 0 \leq \lambda \leq \overline{\lambda}$

Soit $g(\lambda) = f(\widehat{x} + \lambda d)$

hypothèses $\Longrightarrow g$: minimum local en $\lambda = 0$

développement limité : $g(\lambda) = g(0) + \lambda g'(0) + o(\lambda)$

si $g'(0) < 0$ alors, pour λ petit, $\lambda g'(0) + o(\lambda) < 0$

Directions admissibles à l'optimum (2/2)

Démonstration de la proposition :

d direction admissible en $\widehat{x} \Longrightarrow \exists \overline{\lambda} > 0$ t.q. $\widehat{x} + \lambda d \in S$, $\forall 0 \leq \lambda \leq \overline{\lambda}$

Soit $g(\lambda) = f(\widehat{x} + \lambda d)$

hypothèses $\Longrightarrow g$: minimum local en $\lambda = 0$

développement limité : $g(\lambda) = g(0) + \lambda g'(0) + o(\lambda)$

si $g'(0) < 0$ alors, pour λ petit, $\lambda g'(0) + o(\lambda) < 0$

$\Longrightarrow g(\lambda) < g(0) \Longrightarrow$ impossible : $g(0)$ minimum local

Directions admissibles à l'optimum (2/2)

Démonstration de la proposition :

d direction admissible en $\widehat{x} \Longrightarrow \exists \overline{\lambda} > 0$ t.q. $\widehat{x} + \lambda d \in S$, $\forall 0 \leq \lambda \leq \overline{\lambda}$

Soit $g(\lambda) = f(\widehat{x} + \lambda d)$

hypothèses $\Longrightarrow g$: minimum local en $\lambda = 0$

développement limité : $g(\lambda) = g(0) + \lambda g'(0) + o(\lambda)$

si $g'(0) < 0$ alors, pour λ petit, $\lambda g'(0) + o(\lambda) < 0$

$\Longrightarrow g(\lambda) < g(0) \Longrightarrow$ impossible : $g(0)$ minimum local

$\Longrightarrow g'(0) \geq 0$. Or $g'(\lambda) = \vec{\nabla} f(\widehat{x} + \lambda d)^T d$

et donc $\vec{\nabla} f(\widehat{x})^T d \geq 0$

Conditions de Kuhn et Tucker (1/4)

Cas particulier d'ensemble S

- $S = \{x : g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$
- $g_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1

Conditions de Kuhn et Tucker (1/4)

Cas particulier d'ensemble S

- $S = \{x : g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$
- $g_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1

- x^* : point quelconque de S
- contrainte serrée = contrainte telle que $g_i(x^*) = 0$

Cas particulier d'ensemble S

- $S = \{x : g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$
- $g_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1

- x^* : point quelconque de S
- contrainte serrée = contrainte telle que $g_i(x^*) = 0$
- $I(x^*) = \{\text{indices } i \text{ t.q. } g_i(x^*) = 0\}$

$$= \{\text{indices des contraintes serrées}\}$$

Conditions de Kuhn et Tucker (1/4)

Cas particulier d'ensemble S

- $S = \{x : g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$
- $g_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1

- x^* : point quelconque de S
- contrainte serrée = contrainte telle que $g_i(x^*) = 0$
- $I(x^*) = \{\text{indices } i \text{ t.q. } g_i(x^*) = 0\}$

  $= \{\text{indices des contraintes serrées}\}$
- $D(x^*) = \{d : \vec{\nabla} g_i(x^*)^T d \leq 0, i \in I(x^*)\}$

  $\Longrightarrow$ direction admissible en $x^* \in D(x^*)$

Cas particulier d'ensemble S

- $S = \{x : g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \dots, m\}$
- $g_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1

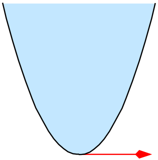
- x^* : point quelconque de S
- contrainte serrée = contrainte telle que $g_i(x^*) = 0$
- $I(x^*) = \{\text{indices } i \text{ t.q. } g_i(x^*) = 0\}$

  $= \{\text{indices des contraintes serrées}\}$
- $D(x^*) = \{d : \vec{\nabla} g_i(x^*)^T d \leq 0, i \in I(x^*)\}$

$\Longrightarrow$ direction admissible en $x^* \in D(x^*)$

⚠ l'inverse n'est pas forcément vrai :

$S = \{x : x_1^2 - x_2 \leq 0\}$



$D(0) = \{(d_1, d_2) : d_2 \geq 0\}$

$\Longrightarrow d = (1, 0) \in D(0)$

$\widehat{x}$ = minimum local de f sur S

$I(\widehat{x}) = \{i_1, \ldots, i_k\}$

Supp que $D(\widehat{x}) = \{$toutes les directions admissibles en $\widehat{x}\}$

$\widehat{x}$ = minimum local de f sur S

$I(\widehat{x}) = \{i_1, \ldots, i_k\}$

Supp que $D(\widehat{x}) = \{$toutes les directions admissibles en $\widehat{x}\}$

Soit $\overline{A}$ = matrice des $-\vec{\nabla} g_i(\widehat{x})$, $i \in I(\widehat{x})$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial g_{i_1}}{\partial x_1}(\widehat{x}) & -\frac{\partial g_{i_2}}{\partial x_1}(\widehat{x}) & \cdots & -\frac{\partial g_{i_k}}{\partial x_1}(\widehat{x}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{\partial g_{i_1}}{\partial x_n}(\widehat{x}) & -\frac{\partial g_{i_2}}{\partial x_n}(\widehat{x}) & \cdots & -\frac{\partial g_{i_k}}{\partial x_n}(\widehat{x}) \end{bmatrix}$$

$\widehat{x}$ = minimum local de f sur S

$I(\widehat{x}) = \{i_1, \ldots, i_k\}$

Supp que $D(\widehat{x}) = \{$toutes les directions admissibles en $\widehat{x}\}$

Soit $\overline{A} =$ matrice des $-\vec{\nabla} g_i(\widehat{x})$, $i \in I(\widehat{x})$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial g_{i_1}}{\partial x_1}(\widehat{x}) & -\dfrac{\partial g_{i_2}}{\partial x_1}(\widehat{x}) & \cdots & -\dfrac{\partial g_{i_k}}{\partial x_1}(\widehat{x}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\dfrac{\partial g_{i_1}}{\partial x_n}(\widehat{x}) & -\dfrac{\partial g_{i_2}}{\partial x_n}(\widehat{x}) & \cdots & -\dfrac{\partial g_{i_k}}{\partial x_n}(\widehat{x}) \end{bmatrix}$$

Rappel Proposition 1 :

$\widehat{x}$ minimum local $\Longrightarrow \forall$ direction admissible d en $\widehat{x}$, $\vec{\nabla} f(\widehat{x})^T d \geq 0$

$\Longrightarrow$ le système $d^T \overline{A} \geq 0, \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T d < 0$ n'a pas de solution

Conditions de Kuhn et Tucker (3/4)

Rappel : Lemme de Farkas

- A une matrice $m \times n$
- c un vecteur de taille n
- les deux énoncés suivants sont équivalents :
  1. $Ax \geq 0 \Longrightarrow c^T x \geq 0$
  2. il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

Rappel : Lemme de Farkas

- A une matrice $m \times n$
- c un vecteur de taille n
- les deux énoncés suivants sont équivalents :
  1. $Ax \geq 0 \Longrightarrow c^T x \geq 0$
  2. il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

le système $d^T \overline{A} \geq 0, \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T d < 0$ n'a pas de solution

$$\Longrightarrow (d^T \overline{A} \geq 0 \Longrightarrow \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T d \geq 0)$$

Rappel : Lemme de Farkas

- A une matrice $m \times n$
- c un vecteur de taille n
- les deux énoncés suivants sont équivalents :
  1. $Ax \geq 0 \Longrightarrow c^T x \geq 0$
  2. il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

le système $d^T \overline{A} \geq 0, \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T d < 0$ n'a pas de solution

$$\Longrightarrow (d^T \overline{A} \geq 0 \Longrightarrow \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T d \geq 0)$$

$$\Longrightarrow \exists \text{ vecteur } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \overline{A}\lambda = \vec{\nabla} f(\widehat{x})$$

$$\Longrightarrow \vec{\nabla} f(\widehat{x}) = \sum_{i \in I(\widehat{x})} -\lambda_i \vec{\nabla} g_i(\widehat{x}) \Longrightarrow \vec{\nabla} f(\widehat{x}) + \sum_{i \in I(\widehat{x})} \lambda_i \vec{\nabla} g_i(\widehat{x}) = 0$$

Conditions de Kuhn et Tucker (4/4)

$\Longrightarrow$ conditions de Kuhn et Tucker (1951) :

Conditions nécessaires d'optimalité de Kuhn et Tucker

- f de classe C^1
- hypothèse de qualification des contraintes :

  $\widehat{x}$ = point de S tel que $D(\widehat{x}) = \{\text{directions admissibles en } \widehat{x}\}$
- alors condition nécessaire pour que $\widehat{x} =$ minimum local de f :

  $\exists \lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, tels que :

  1. $\vec{\nabla} f(\widehat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{\nabla} g_i(\widehat{x}) = 0$
  2. $\lambda_i g_i(\widehat{x}) = 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}$

⚠ lorsque $i \notin I(\widehat{x})$, il suffit de fixer $\lambda_i = 0$

Remarque sur la qualification des contraintes

⚠ l'hypothèse de qualification des contraintes est primordiale pour le théorème de Kuhn et Tucker

Exemple :

$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, 3\}$

$g_1(x_1, x_2) = -x_1 \qquad g_2(x_1, x_2) = -x_2 \qquad g_3(x_1, x_2) = x_2 - (1 - x_1)^3$

Remarque sur la qualification des contraintes

⚠ l'hypothèse de qualification des contraintes est primordiale pour le théorème de Kuhn et Tucker

Exemple :

$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, 3\}$

$g_1(x_1, x_2) = -x_1 \qquad g_2(x_1, x_2) = -x_2 \qquad g_3(x_1, x_2) = x_2 - (1 - x_1)^3$

si $f(x_1, x_2) = -x_1$ alors $\widehat{x} = (1, 0)$, $I(\widehat{x}) = \{2, 3\}$

Remarque sur la qualification des contraintes

⚠ l'hypothèse de qualification des contraintes est primordiale pour le théorème de Kuhn et Tucker

Exemple :

$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, 3\}$

$g_1(x_1, x_2) = -x_1 \qquad g_2(x_1, x_2) = -x_2 \qquad g_3(x_1, x_2) = x_2 - (1 - x_1)^3$

si $f(x_1, x_2) = -x_1$ alors $\widehat{x} = (1, 0)$, $I(\widehat{x}) = \{2, 3\}$

$\vec{\nabla} f(\widehat{x}) = (-1, 0)$

Remarque sur la qualification des contraintes

⚠ l'hypothèse de qualification des contraintes est primordiale pour le théorème de Kuhn et Tucker

Exemple :

$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, 3\}$

$g_1(x_1, x_2) = -x_1 \qquad g_2(x_1, x_2) = -x_2 \qquad g_3(x_1, x_2) = x_2 - (1 - x_1)^3$

si $f(x_1, x_2) = -x_1$ alors $\widehat{x} = (1, 0)$, $I(\widehat{x}) = \{2, 3\}$

$\vec{\nabla} f(\widehat{x}) = (-1, 0)$

$\lambda_2 \vec{\nabla} g_2(\widehat{x}) + \lambda_3 \vec{\nabla} g_3(\widehat{x}) = \lambda_2(0, 1) + \lambda_3(0, -1) = (0, \lambda_2 - \lambda_3)$

⚠ l'hypothèse de qualification des contraintes est primordiale pour le théorème de Kuhn et Tucker

Exemple :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, 3\}$$

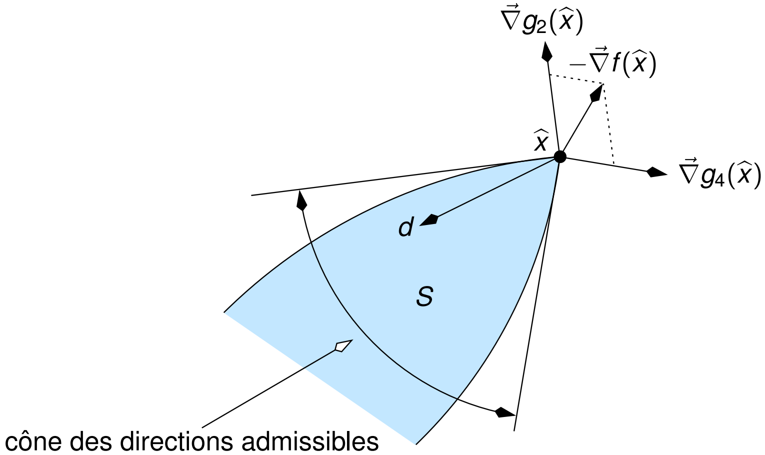
$$g_1(x_1, x_2) = -x_1 \qquad g_2(x_1, x_2) = -x_2 \qquad g_3(x_1, x_2) = x_2 - (1 - x_1)^3$$

si $f(x_1, x_2) = -x_1$ alors $\widehat{x} = (1, 0)$, $I(\widehat{x}) = \{2, 3\}$

$$\vec{\nabla} f(\widehat{x}) = (-1, 0)$$

$$\lambda_2 \vec{\nabla} g_2(\widehat{x}) + \lambda_3 \vec{\nabla} g_3(\widehat{x}) = \lambda_2(0, 1) + \lambda_3(0, -1) = (0, \lambda_2 - \lambda_3)$$

$$\Longrightarrow \vec{\nabla} f(\widehat{x}) \neq \lambda_2 \vec{\nabla} g_2(\widehat{x}) + \lambda_3 \vec{\nabla} g_3(\widehat{x})$$



Kuhn et Tucker : $-\vec{\nabla} f(\widehat{x})$ = combinaison linéaire (à coeffs positifs) des $\vec{\nabla} g_i(\widehat{x})$

$\Longrightarrow -\vec{\nabla} f(\widehat{x})$ forme un angle obtus avec toute direction admissible

Considérations sur les conditions de Kuhn et Tucker

transparents précédents :

conditions de Kuhn et Tucker = conditions nécessaires

sous certaines hypothèses de convexité : conditions suffisantes

$\Longrightarrow$ on va s'intéresser maintenant à des propriétés de convexité

Proposition 2

- f de classe C^1
- $S \subseteq \mathbb{R}^n$: ensemble convexe
- f convexe sur $S \iff \forall x, y \in S$:

$$f(y) \geq f(x) + \vec{\nabla} f(x)^T (y - x)$$

Démonstration :

Supposons f convexe sur S

$$\Longrightarrow f(\lambda y + (1-\lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda)f(x) \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1$$

Convexité (2/3)

Démonstration :

Supposons f convexe sur S

$$\Longrightarrow f(\lambda y + (1-\lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x) \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\Longrightarrow \forall 0 < \lambda \leq 1, \quad \frac{f(\lambda y + (1-\lambda)x) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x)$$

Convexité (2/3)

Démonstration :

Supposons f convexe sur S

$$\Longrightarrow f(\lambda y + (1-\lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x) \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\Longrightarrow \forall 0 < \lambda \leq 1, \quad \frac{f(\lambda y + (1-\lambda)x) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x)$$

Or
$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(\lambda y + (1-\lambda)x) - f(x)}{\lambda} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x + \lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda} = \vec{\nabla} f(x)^T (y-x)$$

Démonstration :

Supposons f convexe sur S

$$\Longrightarrow f(\lambda y + (1-\lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x) \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\Longrightarrow \forall 0 < \lambda \leq 1, \quad \frac{f(\lambda y + (1-\lambda)x) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x)$$

$$\text{Or } \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(\lambda y + (1-\lambda)x) - f(x)}{\lambda} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x + \lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda}$$

$$= \vec{\nabla} f(x)^T (y - x)$$

$$\Longrightarrow \vec{\nabla} f(x)^T (y-x) \leq f(y) - f(x)$$

$$\Longrightarrow f(y) \geq f(x) + \vec{\nabla} f(x)^T (y-x)$$

Convexité (3/3)

Réciproque :

supp $f(y) \geq f(x) + \vec{\nabla} f(x)^T (y - x) \; \forall x, y \in S$

Convexité (3/3)

Réciproque :

supp $f(y) \geq f(x) + \vec{\nabla} f(x)^T (y - x) \ \forall x, y \in S$

Soit 2 points $x_1, x_2 \in S$ et $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2, \ \lambda \in [0, 1]$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f(x_1) \geq f(x) + \vec{\nabla} f(x)^T (x_1 - x) \\ f(x_2) \geq f(x) + \vec{\nabla} f(x)^T (x_2 - x) \end{cases}$$

Réciproque :

supp $f(y) \geq f(x) + \vec{\nabla} f(x)^T (y - x) \; \forall x, y \in S$

Soit 2 points $x_1, x_2 \in S$ et $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2, \; \lambda \in [0, 1]$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f(x_1) \geq f(x) + \vec{\nabla} f(x)^T (x_1 - x) \\ f(x_2) \geq f(x) + \vec{\nabla} f(x)^T (x_2 - x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) &\geq f(x) + \vec{\nabla} f(x)^T [\lambda (x_1 - x) + (1 - \lambda)(x_2 - x)] \\ &\geq f(x) + \vec{\nabla} f(x)^T [\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 - x] \\ &\geq f(x) = f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \end{aligned}$$

Réciproque :

supp $f(y) \geq f(x) + \vec{\nabla} f(x)^T (y - x) \ \forall x, y \in S$

Soit 2 points $x_1, x_2 \in S$ et $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2, \ \lambda \in [0, 1]$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f(x_1) \geq f(x) + \vec{\nabla} f(x)^T (x_1 - x) \\ f(x_2) \geq f(x) + \vec{\nabla} f(x)^T (x_2 - x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) &\geq f(x) + \vec{\nabla} f(x)^T [\lambda (x_1 - x) + (1 - \lambda)(x_2 - x)] \\ &\geq f(x) + \vec{\nabla} f(x)^T [\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 - x] \\ &\geq f(x) = f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow f$ convexe sur S

Caractérisation d'un minimum global (1/2)

Rappel : Proposition 1 : minimum local

- $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1
- $\widehat{x}$ minimum local de f sur S

$\Longrightarrow \forall$ direction admissible d en $\widehat{x}$, on a $\vec{\nabla} f(\widehat{x})^T d \geq 0$

Proposition 3 : minimum global

- $S \subseteq \mathbb{R}^n$: ensemble convexe
- $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1 convexe sur S
- $\widehat{x}$ minimum global de f sur $S \Longleftrightarrow \forall y \in S, \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T (y - \widehat{x}) \geq 0$

Caractérisation d'un minimum global (2/2)

Démonstration :

$\widehat{x}$ minimum global de $f \Longrightarrow \widehat{x}$ minimum local de f

Démonstration :

$\widehat{x}$ minimum global de $f \Longrightarrow \widehat{x}$ minimum local de f

Proposition 1 $\Longrightarrow \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T d \geq 0 \quad \forall$ direction d admissible en $\widehat{x}$

Démonstration :

$\widehat{x}$ minimum global de $f \Longrightarrow \widehat{x}$ minimum local de f

Proposition 1 $\Longrightarrow \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T d \geq 0 \quad \forall$ direction d admissible en $\widehat{x}$

S convexe $\Longrightarrow (y \in S \Longrightarrow (y - \widehat{x})$ admissible$)$

$\Longrightarrow \forall y \in S, \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T (y - \widehat{x}) \geq 0$

Démonstration :

$\widehat{x}$ minimum global de $f \Longrightarrow \widehat{x}$ minimum local de f

Proposition 1 $\Longrightarrow \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T d \geq 0 \quad \forall$ direction d admissible en $\widehat{x}$

S convexe $\Longrightarrow (y \in S \Longrightarrow (y - \widehat{x})$ admissible)

$\Longrightarrow \forall y \in S, \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T (y - \widehat{x}) \geq 0$

Réciproque : supp que $\vec{\nabla} f(\widehat{x})^T (y - \widehat{x}) \geq 0 \quad \forall y \in S$

Démonstration :

$\widehat{x}$ minimum global de $f \Longrightarrow \widehat{x}$ minimum local de f

Proposition 1 $\Longrightarrow \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T d \geq 0 \quad \forall$ direction d admissible en $\widehat{x}$

S convexe $\Longrightarrow (y \in S \Longrightarrow (y - \widehat{x})$ admissible)

$\Longrightarrow \forall y \in S, \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T (y - \widehat{x}) \geq 0$

Réciproque : supp que $\vec{\nabla} f(\widehat{x})^T (y - \widehat{x}) \geq 0 \quad \forall y \in S$

f convexe $\Longrightarrow f(y) \geq f(\widehat{x}) + \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T (y - \widehat{x})$ d'après proposition 2

Caractérisation d'un minimum global (2/2)

Démonstration :

$\widehat{x}$ minimum global de $f \Longrightarrow \widehat{x}$ minimum local de f

Proposition 1 $\Longrightarrow \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T d \geq 0 \quad \forall$ direction d admissible en $\widehat{x}$

S convexe $\Longrightarrow (y \in S \Longrightarrow (y - \widehat{x})$ admissible)

$\Longrightarrow \forall y \in S, \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T (y - \widehat{x}) \geq 0$

Réciproque : supp que $\vec{\nabla} f(\widehat{x})^T (y - \widehat{x}) \geq 0 \quad \forall y \in S$

f convexe $\Longrightarrow f(y) \geq f(\widehat{x}) + \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T (y - \widehat{x})$ d'après proposition 2

$\Longrightarrow f(y) \geq f(\widehat{x})$

Démonstration :

$\widehat{x}$ minimum global de $f \Longrightarrow \widehat{x}$ minimum local de f

Proposition 1 $\Longrightarrow \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T d \geq 0 \quad \forall$ direction d admissible en $\widehat{x}$

S convexe $\Longrightarrow (y \in S \Longrightarrow (y - \widehat{x})$ admissible$)$

$\Longrightarrow \forall y \in S, \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T (y - \widehat{x}) \geq 0$

Réciproque : supp que $\vec{\nabla} f(\widehat{x})^T (y - \widehat{x}) \geq 0 \quad \forall y \in S$

f convexe $\Longrightarrow f(y) \geq f(\widehat{x}) + \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T (y - \widehat{x})$ d'après proposition 2

$\Longrightarrow f(y) \geq f(\widehat{x})$

$\Longrightarrow \widehat{x} =$ optimum global de f sur S

Rappel : Conditions nécessaire d'optimalité

Rappel : Conditions de Kuhn et Tucker

- f de classe C^1
- $I(x^*) = \{\text{indices } i \text{ t.q. } g_i(x^*) = 0\}$
- $D(x^*) = \{d : \vec{\nabla} g_i(x^*)^T d \leq 0, i \in I(x^*)\}$
- $\widehat{x}$ = point de S tel que $D(\widehat{x}) = \{\text{directions admissibles en } \widehat{x}\}$
- alors condition nécessaire pour que $\widehat{x}$ = minimum local de f :

  $\exists \lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, tels que :

  1. $\vec{\nabla} f(\widehat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{\nabla} g_i(\widehat{x}) = 0$
  2. $\lambda_i g_i(\widehat{x}) = 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}$

Conditions suffisantes d'optimalité de Kuhn et Tucker

- g_i convexes de classe C^1, $i = 1, \ldots, m$
- $S = \{x : g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$
- f de classe C^1 convexe sur S
- $\widehat{x}$ = point de S tel que $\exists \lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, tels que :
  1. $\vec{\nabla} f(\widehat{x}) + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{\nabla} g_i(\widehat{x}) = 0$
  2. $\lambda_i g_i(\widehat{x}) = 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}$

$\Longrightarrow \widehat{x} =$ minimum global de f sur S

Démonstration :

Soit $y \in S$, $y \neq \widehat{x}$. On veut montrer que $f(y) \geq f(\widehat{x})$

Conditions suffisantes d'optimalité (2/2)

Démonstration :

Soit $y \in S$, $y \neq \widehat{x}$. On veut montrer que $f(y) \geq f(\widehat{x})$

$$
\begin{aligned}
\text{les } g_i \text{ convexes} &\Longrightarrow S \text{ convexe} \\
&\Longrightarrow \widehat{d} = y - \widehat{x} \text{ direction admissible en } \widehat{x} \\
&\Longrightarrow \vec{\nabla} g_i(\widehat{x})^T \widehat{d} \leq 0 \;\; \forall i \in I(\widehat{x})
\end{aligned}
$$

Conditions suffisantes d'optimalité (2/2)

Démonstration :

Soit $y \in S$, $y \neq \widehat{x}$. On veut montrer que $f(y) \geq f(\widehat{x})$

les g_i convexes $\Longrightarrow S$ convexe

$\Longrightarrow \widehat{d} = y - \widehat{x}$ direction admissible en $\widehat{x}$

$\Longrightarrow \vec{\nabla} g_i(\widehat{x})^T \widehat{d} \leq 0 \;\; \forall i \in I(\widehat{x})$

Or conditions ❶ et ❷ de Kuhn et Tucker équivalentes à :

$$\vec{\nabla} f(\widehat{x})^T d \geq 0 \; \forall \text{ direction } d \text{ telle que } \vec{\nabla} g_i(\widehat{x})^T d \leq 0 \; \forall i \in I(\widehat{x})$$

Conditions suffisantes d'optimalité (2/2)

Démonstration :

Soit $y \in S$, $y \neq \widehat{x}$. On veut montrer que $f(y) \geq f(\widehat{x})$

les g_i convexes $\Longrightarrow$ S convexe

$\Longrightarrow \widehat{d} = y - \widehat{x}$ direction admissible en $\widehat{x}$

$\Longrightarrow \vec{\nabla} g_i(\widehat{x})^T \widehat{d} \leq 0 \;\; \forall i \in I(\widehat{x})$

Or conditions ❶ et ❷ de Kuhn et Tucker équivalentes à :

$$\vec{\nabla} f(\widehat{x})^T d \geq 0 \; \forall \text{ direction } d \text{ telle que } \vec{\nabla} g_i(\widehat{x})^T d \leq 0 \; \forall i \in I(\widehat{x})$$

On sait que $\widehat{d}$ vérifie $\vec{\nabla} g_i(\widehat{x})^T \widehat{d} \leq 0 \;\; \forall i \in I(\widehat{x})$

Hypothèse de la proposition $\Longrightarrow \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T \widehat{d} = f(\widehat{x})^T (y - \widehat{x}) \geq 0$

Conditions suffisantes d'optimalité (2/2)

Démonstration :

Soit $y \in S$, $y \neq \widehat{x}$. On veut montrer que $f(y) \geq f(\widehat{x})$

les g_i convexes $\Longrightarrow$ S convexe

$\Longrightarrow \widehat{d} = y - \widehat{x}$ direction admissible en $\widehat{x}$

$\Longrightarrow \vec{\nabla} g_i(\widehat{x})^T \widehat{d} \leq 0 \;\; \forall i \in I(\widehat{x})$

Or conditions ❶ et ❷ de Kuhn et Tucker équivalentes à :

$$\vec{\nabla} f(\widehat{x})^T d \geq 0 \; \forall \text{ direction } d \text{ telle que } \vec{\nabla} g_i(\widehat{x})^T d \leq 0 \; \forall i \in I(\widehat{x})$$

On sait que $\widehat{d}$ vérifie $\vec{\nabla} g_i(\widehat{x})^T \widehat{d} \leq 0 \;\; \forall i \in I(\widehat{x})$

Hypothèse de la proposition $\Longrightarrow \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T \widehat{d} = f(\widehat{x})^T (y - \widehat{x}) \geq 0$

Or Prop. 3 : $\widehat{x}$ minimum global de $f \Longleftrightarrow \forall y \in S, \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T (y - \widehat{x}) \geq 0$

Conditions suffisantes d'optimalité (2/2)

Démonstration :

Soit $y \in S$, $y \neq \widehat{x}$. On veut montrer que $f(y) \geq f(\widehat{x})$

les g_i convexes $\Longrightarrow$ S convexe

$\Longrightarrow \widehat{d} = y - \widehat{x}$ direction admissible en $\widehat{x}$

$\Longrightarrow \vec{\nabla} g_i(\widehat{x})^T \widehat{d} \leq 0 \;\; \forall i \in I(\widehat{x})$

Or conditions 1 et 2 de Kuhn et Tucker équivalentes à :

$$\vec{\nabla} f(\widehat{x})^T d \geq 0 \; \forall \text{ direction } d \text{ telle que } \vec{\nabla} g_i(\widehat{x})^T d \leq 0 \; \forall i \in I(\widehat{x})$$

On sait que $\widehat{d}$ vérifie $\vec{\nabla} g_i(\widehat{x})^T \widehat{d} \leq 0 \;\; \forall i \in I(\widehat{x})$

Hypothèse de la proposition $\Longrightarrow \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T \widehat{d} = f(\widehat{x})^T (y - \widehat{x}) \geq 0$

Or Prop. 3 : $\widehat{x}$ minimum global de $f \Longleftrightarrow \forall y \in S, \vec{\nabla} f(\widehat{x})^T (y - \widehat{x}) \geq 0$

$\Longrightarrow \widehat{x}$ minimum global de f

Définition de la fonction de Lagrange

- *Problème d'origine* :

  $\min f(x)$

  s.c. $g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m$

- *Fonction de Lagrange* :

  $$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

- $\lambda_i \geq 0$: *multiplicateur de Lagrange*

Fonctions primales / duales

Fonction de Lagrange : $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$

Fonction primale / duale

- Fonction primale : $L^*(x) = \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda)$
- Fonction duale : $L_*(\lambda) = \min_{x} L(x, \lambda)$

Fonctions primales / duales

Fonction de Lagrange : $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$

Fonction primale / duale

- Fonction primale : $L^*(x) = \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda)$
- Fonction duale : $L_*(\lambda) = \min_{x} L(x, \lambda)$

Problème primal / dual

- Problème primal : $L^*(\widehat{x}) = \min_{x} L^*(x) = \min_{x} \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda)$
- Problème dual : $L_*(\widehat{\lambda}) = \max_{\lambda \geq 0} L_*(\lambda) = \max_{\lambda \geq 0} \min_{x} L(x, \lambda)$

$$
\begin{aligned}
L^*(x) &= \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) \\
&= \max_{\lambda \geq 0} \left(f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \right) \\
&= \begin{cases} f(x) \text{ si } g_i(x) \leq 0 \ \forall i \\ +\infty \text{ si } g_i(x) > 0 \text{ pour un } i \end{cases}
\end{aligned}
$$

Interprétation du problème primal / dual

$$
\begin{aligned}
L^*(x) &= \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) \\
&= \max_{\lambda \geq 0} \left(f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \right) \\
&= \begin{cases} f(x) \text{ si } g_i(x) \leq 0 \ \forall i \\ +\infty \text{ si } g_i(x) > 0 \text{ pour un } i \end{cases}
\end{aligned}
$$

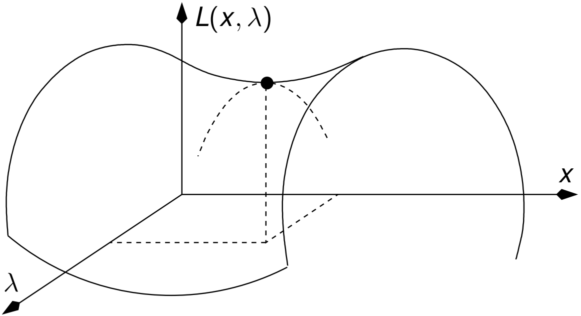
Problème primal : $L^*(\widehat{x}) = \min_x L^*(x) \Longrightarrow$ ne s'intéresser qu'aux x tels que $g_i(x) \leq 0$

$\Longrightarrow$ le problème devient alors : $\begin{cases} \min f(x) \\ s.c. \ \ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{cases}$

Définition d'un point selle

- Soit $\overline{x} \in S, \quad \overline{\lambda} \geq 0$
- $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ est un point selle de $L(x, \lambda)$ si :

$$L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \leq L(x, \overline{\lambda}) \qquad \forall x \in S$$
$$L(\overline{x}, \lambda) \leq L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \qquad \forall \lambda \geq 0$$



Caractérisation d'un point Selle (1/4)

Proposition 4 : Caractérisation d'un point Selle

- Soit $\overline{x} \in S, \quad \overline{\lambda} \geq 0$
- $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ est un point selle de $L(x, \lambda)$ si et seulement si :
    1. $L(\overline{x}, \overline{\lambda}) = \min_{x \in S} L(x, \overline{\lambda})$
    2. $g_i(\overline{x}) \leq 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$
    3. $\overline{\lambda_i} g_i(\overline{x}) = 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$

Démonstration :

supp $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ point selle $\Longrightarrow L(\overline{x}, \lambda) \leq L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \leq L(x, \overline{\lambda}) \quad \forall x, \forall \lambda \geq 0$

Démonstration :

supp $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ point selle $\Longrightarrow L(\overline{x}, \lambda) \leq L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \leq L(x, \overline{\lambda}) \quad \forall x, \forall \lambda \geq 0$

$L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \leq L(x, \overline{\lambda})\ \forall x \Longrightarrow L(\overline{x}, \overline{\lambda}) = \min_x L(x, \overline{\lambda}) \Longrightarrow$ 1

Démonstration :

supp $(\overline{x},\overline{\lambda})$ point selle $\Longrightarrow L(\overline{x},\lambda) \leq L(\overline{x},\overline{\lambda}) \leq L(x,\overline{\lambda}) \quad \forall x, \forall \lambda \geq 0$

$L(\overline{x},\overline{\lambda}) \leq L(x,\overline{\lambda})\ \forall x \Longrightarrow L(\overline{x},\overline{\lambda}) = \min_x L(x,\overline{\lambda}) \Longrightarrow$ 1

$$L(\overline{x},\lambda) \leq L(\overline{x},\overline{\lambda}) \Longleftrightarrow f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\overline{x}) \leq f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_i} g_i(\overline{x})$$
$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \overline{\lambda_i}) g_i(\overline{x}) \leq 0 \quad \forall \lambda \geq 0$$

Démonstration :

supp $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ point selle $\Longrightarrow L(\overline{x}, \lambda) \leq L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \leq L(x, \overline{\lambda}) \quad \forall x, \forall \lambda \geq 0$

$L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \leq L(x, \overline{\lambda})\ \forall x \Longrightarrow L(\overline{x}, \overline{\lambda}) = \min_x L(x, \overline{\lambda}) \Longrightarrow$ ❶

$$L(\overline{x}, \lambda) \leq L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \Longleftrightarrow f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\overline{x}) \leq f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_i} g_i(\overline{x})$$
$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \overline{\lambda_i}) g_i(\overline{x}) \leq 0 \quad \forall \lambda \geq 0$$

Si $\exists i$ t.q. $g_i(\overline{x}) > 0$, alors λ_i suffisamment grand

$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \overline{\lambda_i}) g_i(\overline{x}) > 0 \Longrightarrow$ impossible $\Longrightarrow$ ❷ est vrai

Caractérisation d'un point Selle (3/4)

$$L(\overline{x}, \lambda) \leq L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \overline{\lambda_i}) g_i(\overline{x}) \leq 0 \quad \forall \lambda \geq 0$$

$$\lambda = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_i} g_i(\overline{x}) \geq 0$$

$$L(\overline{x}, \lambda) \leq L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \overline{\lambda_i}) g_i(\overline{x}) \leq 0 \quad \forall \lambda \geq 0$$

$$\lambda = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_i} g_i(\overline{x}) \geq 0$$

$$\text{Or } \overline{\lambda} \geq 0 \text{ et } g_i(\overline{x}) \leq 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_i} g_i(\overline{x}) \leq 0$$

Caractérisation d'un point Selle (3/4)

$$L(\overline{x}, \lambda) \leq L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \overline{\lambda_i}) g_i(\overline{x}) \leq 0 \quad \forall \lambda \geq 0$$

$$\lambda = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_i} g_i(\overline{x}) \geq 0$$

$$\text{Or } \overline{\lambda} \geq 0 \text{ et } g_i(\overline{x}) \leq 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_i} g_i(\overline{x}) \leq 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_i} g_i(\overline{x}) = 0 \Longrightarrow \overline{\lambda_i} g_i(\overline{x}) = 0 \quad \forall i \Longrightarrow \text{3}$$

Réciproque :

Supposons ①, ② et ③

① $\Longrightarrow L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \leq L(x, \overline{\lambda}) \quad \forall x \in S$

Réciproque :

Supposons ❶, ❷ et ❸

❶ $\Longrightarrow L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \leq L(x, \overline{\lambda}) \quad \forall x \in S$

❸ $\Longrightarrow L(\overline{x}, \overline{\lambda}) = f(\overline{x})$

$$L(\overline{x}, \lambda) = f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\overline{x}) \leq f(\overline{x}) = L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \;\; \forall \lambda \geq 0$$

Réciproque :

Supposons ❶, ❷ et ❸

❶ $\Longrightarrow L(\overline{x},\overline{\lambda}) \leq L(x,\overline{\lambda}) \quad \forall x \in S$

❸ $\Longrightarrow L(\overline{x},\overline{\lambda}) = f(\overline{x})$

$$L(\overline{x},\lambda) = f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\overline{x}) \leq f(\overline{x}) = L(\overline{x},\overline{\lambda}) \quad \forall \lambda \geq 0$$

$\Longrightarrow L(\overline{x},\lambda) \leq L(\overline{x},\overline{\lambda}) \leq L(x,\overline{\lambda}) \Longrightarrow (\overline{x},\overline{\lambda})$ point selle

Condition du point selle (1/2)

Condition d'optimalité du point selle

Si $(\widehat{x}, \widehat{\lambda})$ point selle de la fonction de Lagrange, alors :

- $\min\limits_{x} L(x, \widehat{\lambda}) = L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) = \max\limits_{\lambda \geq 0} L(\widehat{x}, \lambda)$
- $\widehat{x}$ = solution de $\begin{cases} \min f(x) \\ s.c. \;\; g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{cases}$

Condition du point selle (2/2)

Démonstration :

$(\widehat{x}, \widehat{\lambda})$ point selle $\Longrightarrow L(\widehat{x}, \lambda) \leq L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) \leq L(x, \widehat{\lambda}) \quad \forall x, \forall \lambda \geq 0$

Condition du point selle (2/2)

Démonstration :

$(\widehat{x}, \widehat{\lambda})$ point selle $\Longrightarrow L(\widehat{x}, \lambda) \leq L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) \leq L(x, \widehat{\lambda}) \quad \forall x, \forall \lambda \geq 0$

$L(\widehat{x}, \lambda) \leq L(\widehat{x}, \widehat{\lambda})\ \forall \lambda \geq 0 \Longrightarrow L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) = \max_{\lambda \geq 0} L(\widehat{x}, \lambda)$

$L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) \leq L(x, \widehat{\lambda})\ \forall x \Longrightarrow L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) = L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) = \min_x L(x, \widehat{\lambda})$

Condition du point selle (2/2)

Démonstration :

$(\widehat{x}, \widehat{\lambda})$ point selle $\Longrightarrow L(\widehat{x}, \lambda) \leq L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) \leq L(x, \widehat{\lambda}) \quad \forall x, \forall \lambda \geq 0$

$L(\widehat{x}, \lambda) \leq L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) \; \forall \lambda \geq 0 \Longrightarrow L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) = \max_{\lambda \geq 0} L(\widehat{x}, \lambda)$

$L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) \leq L(x, \widehat{\lambda}) \; \forall x \Longrightarrow L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) = L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) = \min_x L(x, \widehat{\lambda})$

$$L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) \leq L(x, \widehat{\lambda}) \; \forall x \Longleftrightarrow f(\widehat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i g_i(\widehat{x}) \leq f(x) + \sum_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i g_i(x)$$

Condition du point selle (2/2)

Démonstration :

$$(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) \text{ point selle} \Longrightarrow L(\widehat{x}, \lambda) \leq L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) \leq L(x, \widehat{\lambda}) \quad \forall x, \forall \lambda \geq 0$$

$$L(\widehat{x}, \lambda) \leq L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) \ \forall \lambda \geq 0 \Longrightarrow L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) = \max_{\lambda \geq 0} L(\widehat{x}, \lambda)$$

$$L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) \leq L(x, \widehat{\lambda}) \ \forall x \Longrightarrow L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) = L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) = \min_x L(x, \widehat{\lambda})$$

$$L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) \leq L(x, \widehat{\lambda}) \ \forall x \Longleftrightarrow f(\widehat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i g_i(\widehat{x}) \leq f(x) + \sum_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i g_i(x)$$

Or 3 de la proposition 4 : $\widehat{\lambda}_i g_i(\widehat{x}) = 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$

$$\Longrightarrow f(\widehat{x}) \leq f(x) + \sum_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i g_i(x) \leq f(x) \quad \forall x \in S$$

$$\Longrightarrow \widehat{x} = \text{optimum global de } f \text{ sur } S$$