# Cours 9 : Optimisation non linéaire monodimensionnelle sans contraintes

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

## Plan du cours

1. fonctions unimodales
2. méthode de la suite de Fibonacci
3. méthode dichotomique
4. méthode de Newton



## Minimum local, global

$f$ : fonction $[a, b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

*minimum global*

- $f$ passe par un minimum (global ou absolu) en $\widehat{x}$ si :

$$x \in [a, b] \Longrightarrow f(x) \geq f(\widehat{x})$$

- minimum strict : $x \neq \widehat{x} \Longrightarrow f(x) > f(\widehat{x})$

*minimum local*

- $f$ passe par un minimum local en $\hat{x}$ si :

$$\exists \text{ un voisinage } V \text{ de } \widehat{x} \text{ tel que } x \in V \Longrightarrow f(x) \geq f(\widehat{x})$$

- minimum local strict : $x \in V \setminus \{\widehat{x}\} \Longrightarrow f(x) > f(\widehat{x})$

⚠ Dans $\mathbb{R}$, voisinage $V$ de $\widehat{x}$ = ensemble t.q. :
$V \supseteq$ intervalle ouvert $]\alpha, \beta[ \supseteq \{\widehat{x}\}$



## Fonctions unimodales

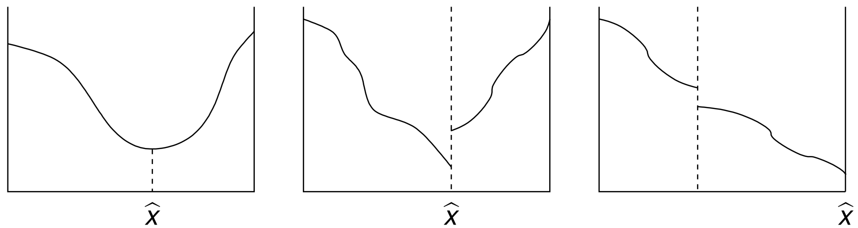
*Définition d'une fonction unimodale*

$f$ est unimodale lorsqu'il existe $\widehat{x} \in [a, b]$ tel que :

$$\begin{aligned} x^1 < x^2 \leq \widehat{x} &\Longrightarrow f(x^1) > f(x^2) \\ \widehat{x} \leq x^1 < x^2 &\Longrightarrow f(x^1) < f(x^2) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ une fonction unimodale passe par un minimum strict

⚠ unimodale $\not\Longrightarrow$ dérivable



## Fonctions convexes et strictement convexes

*Définition d'une fonction convexe*

$f$ est convexe si $\forall x, y \in [a, b]$, $\forall \lambda \in [0, 1]$ :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

*Définition d'une fonction strictement convexe*

$f$ est strictement convexe si $\forall x, y \in [a, b]$, $\forall \lambda \in ]0, 1[$ :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

strictement convexe $\Longrightarrow$ unimodale

convexe $\not\Longrightarrow$ unimodale
unimodale $\not\Longrightarrow$ convexe



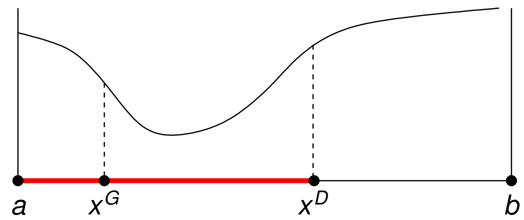
## Unimodalité et recherche de minima

*Lemme 1*

- fonction unimodale
- minimum local $\Longrightarrow$ minimum global

*Lemme 2*

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ unimodale
- $x^G, x^D$ tels que $a < x^G < x^D < b$ alors :
  - $f(x^G) < f(x^D) \Longrightarrow \hat{x} \in [a, x^D]$
  - $f(x^G) > f(x^D) \Longrightarrow \hat{x} \in [x^G, b]$
  - $f(x^G) = f(x^D) \Longrightarrow \hat{x} \in [x^G, x^D]$.






## Application : méthode de la suite de Fibonacci (1/6)

*Rappel : suite de Fibonacci*

- $F_0 = F_1 = 1$
- $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$
- $\frac{F_{k+1}}{F_k} \longrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

méthode de la suite de Fibonacci : utiliser Fibonacci pour trouver rapidement le minimum d'une fonction unimodale sur un intervalle $[a, b]$



## Application : méthode de la suite de Fibonacci (2/6)

*méthode de la suite de Fibonacci*

- on se donne $N$ = nombre total de fois où l'on évaluera $f$ en un point
- initialisation : $a_1 = a$, $b_1 = b$
- itérations :

  $$x_k^G = a_k + \frac{F_{N-k}}{F_{N+2-k}}(b_k - a_k) \qquad x_k^D = a_k + \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}(b_k - a_k)$$

  - $f(x_k^G) < f(x_k^D) \Longrightarrow a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_k^D$
  - $f(x_k^G) > f(x_k^D) \Longrightarrow a_{k+1} = x_k^G$ et $b_{k+1} = b_k$
  - $f(x_k^G) = f(x_k^D) \Longrightarrow a_{k+2} = x_k^G$ et $b_{k+2} = x_k^D$
- arrêt : longueur de l'intervalle après $N$ évaluations de $f$ :

  $$\leq \prod_{k=1}^{N-1} \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}(b-a) = \frac{b-a}{F_{N+1}}$$

## Application : méthode de la suite de Fibonacci (3/6)

*calcul de $x_{k+1}^D$ et $x_{k+1}^G$ : cas $f(x_k^G) < f(x_k^D)$*

- $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_k^D$
- $$x_{k+1}^D = a_{k+1} + \frac{F_{N+1-(k+1)}}{F_{N+2-(k+1)}}(b_{k+1} - a_{k+1})$$
$$= a_k + \frac{F_{N-k}}{F_{N+1-k}}(x_k^D - a_k)$$
$$= a_k + \frac{F_{N-k}}{F_{N+1-k}} \times \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}(b_k - a_k)$$
$$= a_k + \frac{F_{N-k}}{F_{N+2-k}}(b_k - a_k)$$
$$= x_k^G$$

$\Longrightarrow$ seul $f(x_{k+1}^G)$ doit être évalué à l'itération $k+1$



## Application : méthode de la suite de Fibonacci (4/6)

*taille de l'intervalle $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ : cas $f(x_k^G) < f(x_k^D)$*

- $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_k^D$
- $$b_{k+1} - a_{k+1} = x_k^D - a_k = \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}(b_k - a_k)$$

$$\Longrightarrow \frac{b_{k+1} - a_{k+1}}{b_k - a_k} = \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}$$

Par symétrie :

cas $f(x_k^G) > f(x_k^D)$

- seul $f(x_{k+1}^D)$ doit être évalué à l'itération $k+1$
- $$\frac{b_{k+1} - a_{k+1}}{b_k - a_k} = \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}$$



## Application : méthode de la suite de Fibonacci (5/6)

*taille de l'intervalle $[a_{k+2}, b_{k+2}]$ : cas $f(x_k^G) = f(x_k^D)$*

- $a_{k+2} = x_k^G$ et $b_{k+2} = x_k^D$
- $$\frac{b_{k+2} - a_{k+2}}{b_k - a_k} = \frac{F_{N+1-k} - F_{N-k}}{F_{N+2-k}} = \frac{F_{N-1-k}}{F_{N+2-k}}$$
$$= \frac{F_{N-1-k}}{F_{N-k}}\left[\frac{F_{N-k}}{F_{N+1-k}} \times \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}\right]$$
$$\leq \frac{F_{N-k}}{F_{N+1-k}} \times \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}$$

⚠ évaluation de $f$ en $x_{k+2}^G$ et $x_{k+2}^D$ mais intervalle plus réduit que pour 2 itérations des cas $f(x_k^G) \neq f(x_k^D)$



## Application : méthode de la suite de Fibonacci (6/6)

*Résumé :*

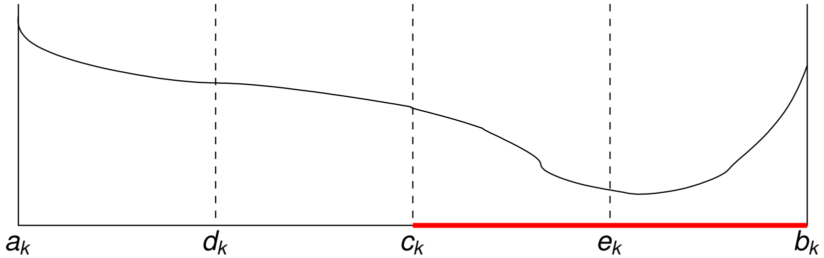
- $f(x_k^G) < f(x_k^D) \Longrightarrow$ seul $f(x_{k+1}^G)$ doit être évalué
$$\frac{b_{k+1} - a_{k+1}}{b_k - a_k} = \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}$$
- $f(x_k^G) > f(x_k^D) \Longrightarrow$ seul $f(x_{k+1}^D)$ doit être évalué
$$\frac{b_{k+1} - a_{k+1}}{b_k - a_k} = \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}$$
- $f(x_k^G) = f(x_k^D) \Longrightarrow f(x_{k+2}^G)$ et $f(x_{k+2}^D)$ doivent être évalués
$$\frac{b_{k+2} - a_{k+2}}{b_k - a_k} \leq \frac{F_{N-k}}{F_{N+1-k}} \times \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}$$

à l'arrêt : $b_N - a_N \leq \prod_{j=1}^{N-1} \frac{F_{N+1-j}}{F_{N+2-j}}(b-a) = \frac{b-a}{F_{N+1}}$

## La méthode dichotomique

*L'algorithme par dichotomie*

- à l'itération $k$ : intervalle $[a_k, b_k]$
- $d_k = \dfrac{3a_k + b_k}{4} \qquad c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2} \qquad e_k = \dfrac{a_k + 3b_k}{4}$
- $f(c_k) > f(e_k) \Longrightarrow a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$
  $f(d_k) < f(c_k) \Longrightarrow a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
  sinon $a_{k+1} = d_k$ et $b_{k+1} = e_k$
- arrêt : quand $b_k - a_k \leq \epsilon$






## Fonctions dérivables

$f : [a, b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable. $f'$ = dérivée de $f$

*Point stationnaire*

$\widehat{x} \in ]a, b[$ : point stationnaire si $f'(\widehat{x}) = 0$

*Lemme 3*

- $f$ dérivable
- $\widehat{x} \in ]a, b[$
- $\widehat{x}$ minimum local de $f \Longrightarrow \widehat{x}$ = point stationnaire

*Lemme 4*

- $f$ dérivable et convexe
- $\widehat{x} \in ]a, b[$
- $\widehat{x}$ minimum local de $f \Longleftrightarrow \widehat{x}$ = point stationnaire



## Dichotomie pour fonctions unimodales dérivables

*Méthode dichotomique*

- $f$ unimodale, dérivable
- $a_1 = a,\ b_1 = b$
- $f'(a_k) < 0$ et $f'(b_k) > 0 \Longrightarrow \widehat{x} \in [a_k, b_k]$
- calcul de $f'\left(\dfrac{a_k + b_k}{2}\right)$
- $f'\left(\dfrac{a_k + b_k}{2}\right) > 0 \Longrightarrow \widehat{x} \in \left[a_k, \dfrac{a_k + b_k}{2}\right]$
- $f'\left(\dfrac{a_k + b_k}{2}\right) < 0 \Longrightarrow \widehat{x} \in \left[\dfrac{a_k + b_k}{2}, b_k\right]$
- $f'\left(\dfrac{a_k + b_k}{2}\right) = 0 \Longrightarrow \widehat{x} = \dfrac{a_k + b_k}{2}$



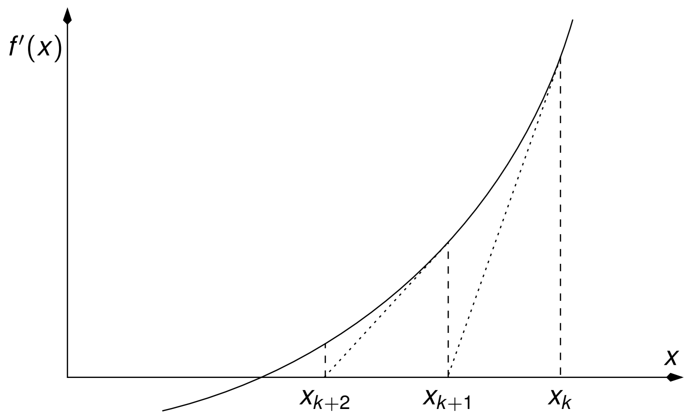
## Méthode de Newton (1/3)

*fonction de classe $C^2$*

- $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
- $f$ : 2 fois dérivable
- $f''$ continue

*Méthode de Newton*

- *principe* : engendrer une suite de points $(x^k)$ tendant vers un point stationnaire
- point stationnaire : $f'(\widehat{x}) = 0$
- itération $k$ : $f'$ est remplacée par sa linéarisée en $x^k$ :
  $l(x) = f'(x^k) + [x - x^k]f''(x^k)$
- $x^{k+1}$ déterminé par $l(x^{k+1}) = 0$ :
  $\Longrightarrow x^{k+1} = x^k - \dfrac{f'(x^k)}{f''(x^k)}$








*Conditions suffisantes de convergence de la méthode*

Conditions suffisantes de convergence à partir d'un point de départ $x^0$ quelconque :

- $f$ de classe $C^3$ et $f'(a) \times f'(b) < 0$
- $f''(x) > 0 \ \forall x$ ($\Longrightarrow$ stricte convexité)
- $0 \leq 1 - \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f'(x)}{f''(x)}\right] \leq q < 1 \ \forall x$

$\Longrightarrow$ taux de convergence quadratique :

$\exists \beta > 0$ tel que $\left\|x^{k+1} - \widehat{x}\right\| \leq \beta \left\|x^k - \widehat{x}\right\|^2$

⚠ conditions très restrictives

en pratique : on applique Newton même si ces conditions ne sont pas satisfaites