Cours 9 : Optimisation non linéaire monodimensionnelle sans contraintes

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

Plan du cours

1. fonctions unimodales
2. méthode de la suite de Fibonacci
3. méthode dichotomique
4. méthode de Newton

Minimum local, global

f : fonction $[a, b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

minimum global

- f passe par un minimum (global ou absolu) en $\widehat{x}$ si :

$$x \in [a, b] \Longrightarrow f(x) \geq f(\widehat{x})$$

- minimum strict : $x \neq \widehat{x} \Longrightarrow f(x) > f(\widehat{x})$

minimum local

- f passe par un minimum local en $\hat{x}$ si :

$$\exists \text{ un voisinage } V \text{ de } \widehat{x} \text{ tel que } x \in V \Longrightarrow f(x) \geq f(\widehat{x})$$

- minimum local strict : $x \in V \backslash \left\{\widehat{x}\right\} \Longrightarrow f(x) > f(\widehat{x})$

⚠ Dans $\mathbb{R}$, voisinage V de $\widehat{x}$ = ensemble t.q. :
$V \supseteq$ intervalle ouvert $]\alpha, \beta[\supseteq \{\widehat{x}\}$

Fonctions unimodales

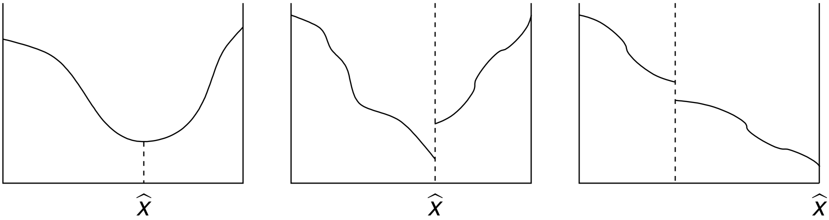
Définition d'une fonction unimodale

f est unimodale lorsqu'il existe $\widehat{x} \in [a, b]$ tel que :

$$x^1 < x^2 \leq \widehat{x} \Longrightarrow f(x^1) > f(x^2)$$
$$\widehat{x} \leq x^1 < x^2 \Longrightarrow f(x^1) < f(x^2)$$

$\Longrightarrow$ une fonction unimodale passe par un minimum strict

unimodale $\not\Longrightarrow$ dérivable



Fonctions convexes et strictement convexes

Définition d'une fonction convexe

f est convexe si $\forall x, y \in [a, b], \ \forall \lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Définition d'une fonction strictement convexe

f est strictement convexe si $\forall x, y \in [a, b], \ \forall \lambda \in]0, 1[$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

strictement convexe $\Longrightarrow$ unimodale

convexe $\not\Longrightarrow$ unimodale
unimodale $\not\Longrightarrow$ convexe

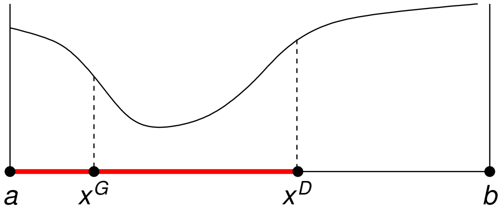
Unimodalité et recherche de minima

Lemme 1

- fonction unimodale
- minimum local $\Longrightarrow$ minimum global

Lemme 2

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ unimodale
- x^G, x^D tels que $a < x^G < x^D < b$ alors :
  - $f(x^G) < f(x^D) \Longrightarrow \widehat{x} \in [a, x^D]$
  - $f(x^G) > f(x^D) \Longrightarrow \widehat{x} \in [x^G, b]$
  - $f(x^G) = f(x^D) \Longrightarrow \widehat{x} \in [x^G, x^D]$.



Application : méthode de la suite de Fibonacci (1/6)

Rappel : suite de Fibonacci

- $F_0 = F_1 = 1$
- $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$
- $\dfrac{F_{k+1}}{F_k} \longrightarrow \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

méthode de la suite de Fibonacci : utiliser Fibonacci pour trouver rapidement le minimum d'une fonction unimodale sur un intervalle $[a, b]$

Application : méthode de la suite de Fibonacci (2/6)

méthode de la suite de Fibonacci

- on se donne N = nombre total de fois où l'on évaluera f en un point
- initialisation : $a_1 = a$, $b_1 = b$
- itérations :

$$x_k^G = a_k + \frac{F_{N-k}}{F_{N+2-k}}(b_k - a_k) \qquad x_k^D = a_k + \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}(b_k - a_k)$$

  - $f(x_k^G) < f(x_k^D) \Longrightarrow a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_k^D$
  - $f(x_k^G) > f(x_k^D) \Longrightarrow a_{k+1} = x_k^G$ et $b_{k+1} = b_k$
  - $f(x_k^G) = f(x_k^D) \Longrightarrow a_{k+2} = x_k^G$ et $b_{k+2} = x_k^D$
- arrêt : longueur de l'intervalle après N évaluations de f :

$$\leq \prod_{k=1}^{N-1} \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}(b - a) = \frac{b-a}{F_{N+1}}$$

calcul de x^D_{k+1} et x^G_{k+1} : cas $f(x^G_k) < f(x^D_k)$

- $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x^D_k$
- $$x^D_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{N+1-(k+1)}}{F_{N+2-(k+1)}}(b_{k+1} - a_{k+1})$$
  $$= a_k + \frac{F_{N-k}}{F_{N+1-k}}(x^D_k - a_k)$$
  $$= a_k + \frac{F_{N-k}}{F_{N+1-k}} \times \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}(b_k - a_k)$$
  $$= a_k + \frac{F_{N-k}}{F_{N+2-k}}(b_k - a_k)$$
  $$= x^G_k$$

$\Longrightarrow$ seul $f(x^G_{k+1})$ doit être évalué à l'itération $k+1$

Application : méthode de la suite de Fibonacci (4/6)

taille de l'intervalle $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ *: cas* $f(x_k^G) < f(x_k^D)$

- $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_k^D$
- $b_{k+1} - a_{k+1} = x_k^D - a_k = \dfrac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}(b_k - a_k)$

$$\Longrightarrow \frac{b_{k+1} - a_{k+1}}{b_k - a_k} = \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}$$

Par symétrie :

cas $f(x_k^G) > f(x_k^D)$

- seul $f(x_{k+1}^D)$ doit être évalué à l'itération $k+1$
- $\dfrac{b_{k+1} - a_{k+1}}{b_k - a_k} = \dfrac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}$

Application : méthode de la suite de Fibonacci (5/6)

taille de l'intervalle $[a_{k+2}, b_{k+2}]$: cas $f(x_k^G) = f(x_k^D)$

- $a_{k+2} = x_k^G$ et $b_{k+2} = x_k^D$
- $$\frac{b_{k+2} - a_{k+2}}{b_k - a_k} = \frac{F_{N+1-k} - F_{N-k}}{F_{N+2-k}} = \frac{F_{N-1-k}}{F_{N+2-k}}$$
  $$= \frac{F_{N-1-k}}{F_{N-k}} \left[\frac{F_{N-k}}{F_{N+1-k}} \times \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}} \right]$$
  $$\leq \frac{F_{N-k}}{F_{N+1-k}} \times \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}$$

⚠ évaluation de f en x_{k+2}^G et x_{k+2}^D mais intervalle plus réduit que pour 2 itérations des cas $f(x_k^G) \neq f(x_k^D)$

Application : méthode de la suite de Fibonacci (6/6)

Résumé :

- $f(x_k^G) < f(x_k^D) \Longrightarrow$ seul $f(x_{k+1}^G)$ doit être évalué

$$\frac{b_{k+1} - a_{k+1}}{b_k - a_k} = \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}$$

- $f(x_k^G) > f(x_k^D) \Longrightarrow$ seul $f(x_{k+1}^D)$ doit être évalué

$$\frac{b_{k+1} - a_{k+1}}{b_k - a_k} = \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}$$

- $f(x_k^G) = f(x_k^D) \Longrightarrow f(x_{k+2}^G)$ et $f(x_{k+2}^D)$ doivent être évalués

$$\frac{b_{k+2} - a_{k+2}}{b_k - a_k} \leq \frac{F_{N-k}}{F_{N+1-k}} \times \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+2-k}}$$

à l'arrêt : $b_N - a_N \leq \prod_{j=1}^{N-1} \frac{F_{N+1-j}}{F_{N+2-j}}(b-a) = \frac{b-a}{F_{N+1}}$

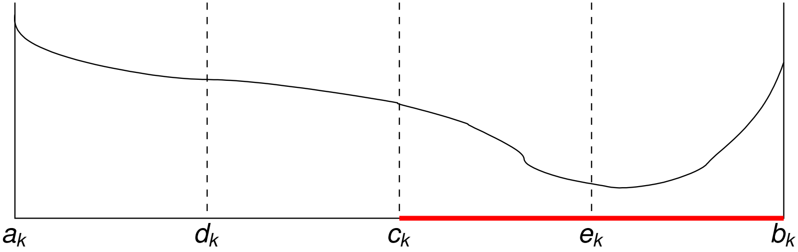
La méthode dichotomique

L'algorithme par dichotomie

- à l'itération k : intervalle $[a_k, b_k]$
- $d_k = \dfrac{3a_k + b_k}{4} \qquad c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2} \qquad e_k = \dfrac{a_k + 3b_k}{4}$
- $f(c_k) > f(e_k) \Longrightarrow a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

  $f(d_k) < f(c_k) \Longrightarrow a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$

  sinon $a_{k+1} = d_k$ et $b_{k+1} = e_k$
- arrêt : quand $b_k - a_k \leq \epsilon$



Fonctions dérivables

$f : [a, b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable. f' = dérivée de f

Point stationnaire

$\widehat{x} \in]a, b[$: point stationnaire si $f'(\widehat{x}) = 0$

Lemme 3

- f dérivable
- $\widehat{x} \in]a, b[$
- $\widehat{x}$ minimum local de $f \Longrightarrow \widehat{x} =$ point stationnaire

Lemme 4

- f dérivable et convexe
- $\widehat{x} \in]a, b[$
- $\widehat{x}$ minimum local de $f \Longleftrightarrow \widehat{x} =$ point stationnaire

Dichotomie pour fonctions unimodales dérivables

Méthode dichotomique

- f unimodale, dérivable
- $a_1 = a$, $b_1 = b$
- $f'(a_k) < 0$ et $f'(b_k) > 0 \Longrightarrow \widehat{x} \in [a_k, b_k]$
- calcul de $f'\left(\dfrac{a_k + b_k}{2}\right)$
- $f'\left(\dfrac{a_k + b_k}{2}\right) > 0 \Longrightarrow \widehat{x} \in \left[a_k, \dfrac{a_k + b_k}{2}\right]$
- $f'\left(\dfrac{a_k + b_k}{2}\right) < 0 \Longrightarrow \widehat{x} \in \left[\dfrac{a_k + b_k}{2}, b_k\right]$
- $f'\left(\dfrac{a_k + b_k}{2}\right) = 0 \Longrightarrow \widehat{x} = \dfrac{a_k + b_k}{2}$

Méthode de Newton (1/3)

fonction de classe C^2

- $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
- f : 2 fois dérivable
- f'' continue

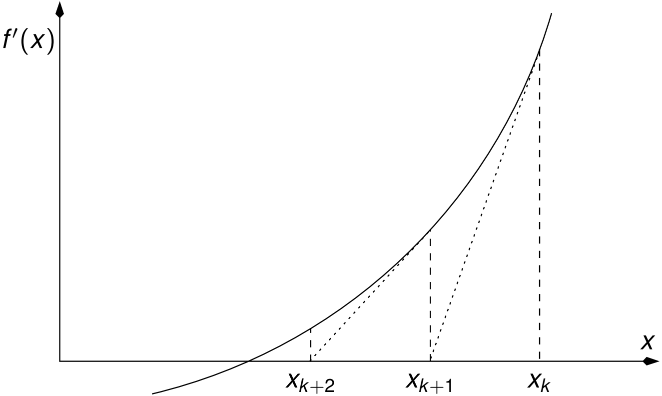
Méthode de Newton

- *principe* : engendrer une suite de points (x^k) tendant vers un point stationnaire
- point stationnaire : $f'(\widehat{x}) = 0$
- itération k : f' est remplacée par sa linéarisée en x^k :

  $l(x) = f'(x^k) + [x - x^k]f''(x^k)$
- x^{k+1} déterminé par $l(x^{k+1}) = 0$:

  $$\Longrightarrow x^{k+1} = x^k - \frac{f'(x^k)}{f''(x^k)}$$

Méthode de Newton (2/3)



Méthode de Newton (3/3)

Conditions suffisantes de convergence de la méthode

Conditions suffisantes de convergence à partir d'un point de départ x^0 quelconque :

- f de classe C^3 et $f'(a) \times f'(b) < 0$
- $f''(x) > 0 \; \forall x$ ($\Longrightarrow$ stricte convexité)
- $0 \leq 1 - \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f'(x)}{f''(x)}\right] \leq q < 1 \; \forall x$

$\Longrightarrow$ taux de convergence quadratique :

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que } \left\|x^{k+1} - \widehat{x}\right\| \leq \beta \left\|x^k - \widehat{x}\right\|^2$$

⚠ conditions très restrictives

en pratique : on applique Newton même si ces conditions ne sont pas satisfaites