

Cours 8 : Applications pratiques de la programmation linéaire

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

- 1 Jeux à deux joueurs à somme nulle
- 2 Théorème du MINIMAX en stratégies pures
- 3 stratégies mixtes
- 4 Théorème du MINIMAX en stratégies mixtes

Théorie des jeux

- **théorie des jeux** = étude des situations (les *jeux*) où des agents (les *joueurs*) ont à choisir des stratégies
- stratégies \implies résultat (paiement, gain) pour chaque joueur
- les résultats dépendent des stratégies jouées par tous les joueurs

Jeu à deux joueurs

Un jeu dans lequel il n'y a que 2 agents

Exemple de jeu à deux joueurs

Exemple : le dilemme des prisonniers

- Deux criminels présumés : Bonnie et Clyde
- interrogés séparément par la police \implies 3 cas :
 - 1 ils nient tous les deux \implies pas de preuve
 \implies faible peine (1 an)
 - 2 ils avouent tous les deux
 \implies peine plus forte (8 ans)
 - 3 l'un des deux avoue tandis que l'autre nie
 \implies peines = 0 an pour l'un et 10 ans pour l'autre

Problème : Que vont faire, que doivent faire, les prisonniers ?

Forme normale d'un jeu à deux joueurs

Définition de la forme normale

- jeu à deux joueurs \implies tableau de gains
- **matrice de jeu** = matrice des gains
- lignes = stratégies du 1er joueur
- colonnes = stratégies du 2ème joueur

Exemple : le dilemme des prisonniers

- { tous deux nient \implies peines d'1 an
tous deux avouent \implies peines de 8 ans
l'un avoue, l'autre nie \implies peines respectives = 0 an et 10 ans

Bonnie \ Clyde	Nier	Avouer
Nier	(-1,-1)	(-10,0)
Avouer	(0,-10)	(-8,-8)

Jeu à deux joueurs à somme nulle

Définition d'un jeu à deux joueurs à somme nulle

Jeu pour lequel la somme des paiements est toujours égale à 0

∇ **stratégies des joueurs**

Forme normale d'un jeu à deux joueurs à somme nulle

- matrice des gains comme dans le jeu à 2 joueurs classique
- mais on n'écrit que le gain du 1er joueur (celui des lignes)
- gain du 2ème joueur = $-\text{gain du 1er joueur}$

Exemple de jeu à deux joueurs à somme nulle

- 3 boîtes : Noire, Rouge, Verte
- joueur II : répartit 2 pièces de 1 € entre les 3 boîtes
- joueur I : choisit 1 boîte et gagne son contenu

Matrice de jeu :

joueur I \ joueur II	NN	RR	VV	NR	NV	RV
N	2	0	0	1	1	0
R	0	2	0	1	0	1
V	0	0	2	0	1	1

Jeu à deux joueurs à somme nulle : forme générale

joueur I \ joueur II	1	2	...	j_0	...	n
1	$g_{1,1}$	$g_{1,2}$...	g_{1,j_0}	...	$g_{1,n}$
2	$g_{2,1}$	$g_{2,2}$...	g_{2,j_0}	...	$g_{2,n}$
...
i_0	$g_{i_0,1}$	$g_{i_0,2}$...	g_{i_0,j_0}	...	$g_{i_0,n}$
...
m	$g_{m,1}$	$g_{m,2}$...	g_{m,j_0}	...	$g_{m,n}$



les gains $g_{i,j}$ dépendent des stratégies i et j des joueurs

- $g_{i,j}$ = gain du joueur I
- $-g_{i,j}$ = gain du joueur II

Stratégie des joueurs

Les joueurs choisissent leurs stratégies à l'insu l'un de l'autre

joueur I : stratégie $i_0 \implies$ gain minimum = $\min_{j=1}^n g_{i_0,j}$

joueur prudent \implies rendre ce gain le plus élevé possible

critère MAXIMIN

stratégie du joueur I : stratégie i telle que $\max_{i=1}^m \min_{j=1}^n g_{i,j}$

second joueur : stratégie $j_0 \implies$ perte maximale = $\max_{i=1}^m g_{i,j_0}$

joueur prudent \implies rendre cette perte la plus petite possible

critère MINIMAX

stratégie du joueur II : stratégie j telle que $\min_{j=1}^n \max_{i=1}^m g_{i,j}$

Théorème du minimax en stratégies pures (1/2)

Théorème du minimax en stratégies pures

$$\max_{i=1}^m \min_{j=1}^n g_{i,j} \leq \min_{j=1}^n \max_{i=1}^m g_{i,j}$$

Démonstration :

$$\forall i, \forall j, \min_{j=1}^n g_{i,j} \leq g_{i,j}$$

$$\forall j, \max_{i=1}^m \min_{j=1}^n g_{i,j} \leq \max_{i=1}^m g_{i,j}$$

$$\text{membre de gauche} = \text{constante} \implies \max_{i=1}^m \min_{j=1}^n g_{i,j} \leq \min_{j=1}^n \max_{i=1}^m g_{i,j}$$

CQFD

Théorème du minimax en stratégies pures (2/2)

 $\max_{i=1}^m \min_{j=1}^n g_{i,j} \neq \min_{j=1}^n \max_{i=1}^m g_{i,j} :$

- 3 boites : Noire, Rouge, Verte
- joueur II : répartit 2 pièces de 1 € entre les 3 boites
- joueur I : choisit 1 boite et gagne son contenu

joueur I \ joueur II	NN	RR	VV	NR	NV	RV	min
N	2	0	0	1	1	0	0
R	0	2	0	1	0	1	0
V	0	0	2	0	1	1	0
max	2	2	2	1	1	1	

Stratégies mixtes / stratégies pure (1/3)

les joueurs ne peuvent être certains d'obtenir plus que ce qu'ils peuvent **s'assurer**

VON NEUMANN : en moyenne peuvent-ils s'assurer plus ?

⇒ concept de stratégie mixte

stratégie mixte

$$\bullet \text{ joueur I : } p = \begin{bmatrix} p^1 \\ p^2 \\ \vdots \\ p^m \end{bmatrix} \quad \text{joueur II : } q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

● p = stratégie mixte du joueur I, p^i = proba de jouer la stratégie i

● q = stratégie mixte du joueur II, q_j = proba de jouer la stratégie j

stratégie pure du joueur I : $p =$ vecteur unité, i.e., $p^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0 \\ 0 & \text{si } i \neq i_0 \end{cases}$

stratégie pure du joueur II : $q =$ vecteur unité, i.e., $q_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = j_0 \\ 0 & \text{si } j \neq j_0 \end{cases}$

Ensemble de stratégies mixtes

- $\mathcal{P} = \{\text{ensemble des stratégies mixtes du 1er joueur}\}$
 $= \left\{ p : p^i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^m p^i = 1 \right\}$
- $\mathcal{Q} = \{\text{ensemble des stratégies mixtes du 2ème joueur}\}$
 $= \left\{ q : q_j \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^n q_j = 1 \right\}$

Stratégies mixtes / stratégies pure (3/3)

$Pr(\{i, j\})$ = proba que le joueur I joue i et le joueur II joue j

Les joueurs jouent indépendamment $\implies Pr(\{i, j\}) = p^i q_j$

espérance mathématique de gain du joueur I

- le joueur I joue la stratégie p
- le joueur II joue la stratégie q
- G = matrice du jeu

$$\text{Espérance de gain} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p^i q_j g_{i,j} = p^T G q$$

à partir de maintenant : les joueurs veulent optimiser leur espérance de gain

Minimax et maximin en stratégies mixtes

$$\text{MAXIMIN} = \max_{p \in \mathcal{P}} \min_{q \in \mathcal{Q}} p^T G q$$

$$\text{MINIMAX} = \min_{q \in \mathcal{Q}} \max_{p \in \mathcal{P}} p^T G q$$

- MAXIMIN = espérance de gain minimale du joueur I
- MINIMAX = espérance de perte maximale du joueur II



En stratégies pures, $\text{MAXIMIN} \leq \text{MINIMAX}$

Théorème du Minimax en stratégies mixtes

Théorème du minimax (von Neumann)

Dans tout jeu à deux joueurs à somme nulle, le minimax et le maximin en stratégies mixtes sont égaux, i.e.,

$$\max_{p \in \mathcal{P}} \min_{q \in \mathcal{Q}} p^T G q = \min_{q \in \mathcal{Q}} \max_{p \in \mathcal{P}} p^T G q$$

Démonstration du théorème du minimax (1/6)

Démonstration :

- démonstration de $\max_{p \in \mathcal{P}} \min_{q \in \mathcal{Q}} p^T G q \leq \min_{q \in \mathcal{Q}} \max_{p \in \mathcal{P}} p^T G q$:
 \implies identique à la démo du théorème en stratégies pures

- G_i^T = ligne i de la matrice du jeu
- G^j = colonne j de la matrice du jeu
- Montrons que ce qu'un joueur peut s'assurer en espérance contre les stratégies pures de l'adversaire, il peut aussi l'assurer contre les stratégies mixtes, i.e.,

$$\max_{p \in \mathcal{P}} \min_{q \in \mathcal{Q}} p^T G q = \max_{p \in \mathcal{P}} \min_{j=1}^n p^T G^j = \min_{q \in \mathcal{Q}} \max_{i=1}^m G_i^T q$$

Démonstration du théorème du minimax (2/6)

Soit p une stratégie mixte quelconque

$$\text{Démonstration de } \min_{q \in \mathcal{Q}} p^T G q = \min_{j=1}^n p^T G^j :$$

stratégie pure = stratégie mixte particulière

$$\implies \min_{q \in \mathcal{Q}} p^T G q \leq \min_{j=1}^n p^T G^j$$

Réciproquement : si $\forall j, p^T G^j \geq \mu$ alors :

$$\forall q, p^T G q = p^T \sum_{j=1}^n G^j q_j = \sum_{j=1}^n [p^T G^j] q_j \geq \sum_{j=1}^n \mu q_j = \mu$$

de même : $\max_{p \in \mathcal{P}} p^T G q = \max_{i=1}^m G_i^T q$

Démonstration du théorème du minimax (3/6)

Résumé du transparent précédent :

Soit p une stratégie mixte quelconque
alors :

$$\min_{q \in Q} p^T G q = \min_{j=1}^n p^T G^j \text{ et } \max_{p \in P} p^T G q = \max_{i=1}^m G_i^T q$$

vrai quel que soit p donc :

$$\begin{aligned} \max_{p \in P} \min_{q \in Q} p^T G q &= \max_{p \in P} \min_{j=1}^n p^T G^j \\ \min_{q \in Q} \max_{p \in P} p^T G q &= \min_{q \in Q} \max_{i=1}^m G_i^T q \end{aligned}$$

Démonstration du théorème du minimax (4/6)

Démonstration par l'absurde de $\text{MINIMAX} \leq \text{MAXIMIN}$:

Supposons que $\text{MAXIMIN} < \text{MINIMAX}$

Soit α tel que $\text{MAXIMIN} < \alpha < \text{MINIMAX}$

Or $\text{MAXIMIN} = \max_{p \in \mathcal{P}} \min_{j=1}^n p^T G^j$ (cf. transparent précédent)

donc \forall stratégie mixte p , $\min_{j=1}^n p^T G^j < \alpha$

donc $\nexists p$ telle que $\forall j, p^T G^j \geq \alpha$

donc le système $\begin{cases} p^T G^j \geq \alpha \forall j \\ p^T \mathbf{1}_m = 1 \\ p^i \geq 0 \forall i \end{cases}$ est incompatible

où $\mathbf{1}_m$ = vecteur de taille m constitué uniquement de 1

Démonstration du théorème du minimax (5/6)

$$\begin{cases} p^T G^j \geq \alpha \quad \forall j \\ p^T 1_m = 1 \\ p^i \geq 0 \quad \forall i \end{cases} \iff \begin{cases} p^T G \geq \alpha_n \\ p^T 1_m \geq 1 \\ -p^T 1_m \geq -1 \\ p^T I_m \geq 0_m \end{cases} \iff \begin{cases} p^T (-G) \leq -\alpha_n \\ p^T (-1_m) \leq -1 \\ p^T 1_m \leq 1 \\ p^T (-I_m) \leq 0_m \end{cases}$$

où I_m = matrice identité et α_n = vecteur constitué de n α

Rappel : théorème de l'alternative

un et un seul des énoncés suivants est vrai :

- 1 il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
- 2 il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$

$$A = [-G \quad -1_m \quad 1_m \quad -I_m] \quad \text{et} \quad c^T = [-\alpha_n^T \quad -1 \quad 1 \quad 0_m^T]$$

$$\implies \nexists p \text{ tel que } p^T A \leq c^T$$

$$\implies \exists x \geq 0 \text{ tel que } Ax = 0 \text{ et } c^T x < 0$$

Démonstration du théorème du minimax (6/6)

$$A = [-G \quad -1_m \quad 1_m \quad -I_m] \quad \text{et} \quad c^T = [-\alpha_n^T \quad -1 \quad 1 \quad 0_m^T]$$

$$\exists x = \begin{bmatrix} y \\ z' \\ z'' \\ d \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0_n \\ 0 \\ 0 \\ 0_m \end{bmatrix} \quad \text{tel que} \quad Ax = 0 \quad \text{et} \quad c^T x < 0$$

$$\implies \text{système} \begin{cases} c^T x = -\alpha_n^T y - z' + z'' < 0 \\ Ax = -Gy - 1_m z' + 1_m z'' - I_m d = 0_m \\ y \geq 0_n, z' \geq 0, z'' \geq 0, d \geq 0_m \end{cases}$$

$$\implies \text{système} \begin{cases} \alpha_n^T y + z' - z'' > 0 \\ Gy + 1_m z' - 1_m z'' + I_m d = 0_m \\ y \geq 0_n, z' \geq 0, z'' \geq 0, d \geq 0_m \end{cases}$$

$$\implies Gy \leq 1_m(z'' - z') \leq 1_m \alpha_n^T y \implies \exists q \text{ t.q. } Gq \leq 1_m \alpha_n^T q = 1_m \alpha = \alpha_m$$

$$\implies G_i q \leq \alpha \quad \forall i \implies \text{contradiction de notre hypothèse de départ}$$

Théorème du minimax (von Neumann)

Dans tout jeu à deux joueurs à somme nulle, le minimax et le maximin en stratégies mixtes sont égaux, i.e.,

$$\max_{p \in \mathcal{P}} \min_{q \in \mathcal{Q}} p^T G q = \min_{q \in \mathcal{Q}} \max_{p \in \mathcal{P}} p^T G q$$

⇒ théorème de dualité