Cours 8 : Applications pratiques de la programmation linéaire

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

Plan du cours

Jeux à deux joueurs

Théorie des jeux

- théorie des jeux = étude des situations (les *jeux*) où des agents (les *joueurs*) ont à choisir des stratégies
- stratégies $\Longrightarrow$ résultat (paiement, gain) pour chaque joueur
- les résultats dépendent des stratégies jouées par tous les joueurs

Jeux à deux joueurs

Théorie des jeux

- théorie des jeux = étude des situations (les *jeux*) où des agents (les *joueurs*) ont à choisir des stratégies
- stratégies $\Longrightarrow$ résultat (paiement, gain) pour chaque joueur
- les résultats dépendent des stratégies jouées par tous les joueurs

Jeu à deux joueurs

Un jeu dans lequel il n'y a que 2 agents

Exemple de jeu à deux joueurs

Exemple : le dilemme des prisonniers

- Deux criminels présumés : Bonnie et Clyde
- interrogés séparément par la police $\Longrightarrow$ 3 cas :

1. ils nient tous les deux $\Longrightarrow$ pas de preuve
   $\Longrightarrow$ faible peine (1 an)
2. ils avouent tous les deux
   $\Longrightarrow$ peine plus forte (8 ans)
3. l'un des deux avoue tandis que l'autre nie
   $\Longrightarrow$ peines = 0 an pour l'un et 10 ans pour l'autre

Problème : Que vont faire, que doivent faire, les prisonniers ?

Forme normale d'un jeu à deux joueurs

Définition de la forme normale

- jeu à deux joueurs $\Longrightarrow$ tableau de gains
- matrice de jeu = matrice des gains
- lignes = stratégies du 1er joueur
- colonnes = stratégies du 2ème joueur

Forme normale d'un jeu à deux joueurs

Définition de la forme normale

- jeu à deux joueurs $\Longrightarrow$ tableau de gains
- matrice de jeu = matrice des gains
- lignes = stratégies du 1er joueur
- colonnes = stratégies du 2ème joueur

Exemple : le dilemme des prisonniers

$$\begin{cases} \text{tous deux nient} \Longrightarrow \text{peines d'1 an} \\ \text{tous deux avouent} \Longrightarrow \text{peines de 8 ans} \\ \text{l'un avoue, l'autre nie} \Longrightarrow \text{peines respectives = 0 an et 10 ans} \end{cases}$$

Forme normale d'un jeu à deux joueurs

Définition de la forme normale

- jeu à deux joueurs $\Longrightarrow$ tableau de gains
- matrice de jeu = matrice des gains
- lignes = stratégies du 1er joueur
- colonnes = stratégies du 2ème joueur

Exemple : le dilemme des prisonniers

$$\begin{cases} \text{tous deux nient} \Longrightarrow \text{peines d'1 an} \\ \text{tous deux avouent} \Longrightarrow \text{peines de 8 ans} \\ \text{l'un avoue, l'autre nie} \Longrightarrow \text{peines respectives = 0 an et 10 ans} \end{cases}$$

Bonnie \ Clyde	Nier	Avouer
Nier	(1 an,1 an)	(10 ans,0 an)
Avouer	(0 an,10 ans)	(8 ans,8 ans)

Forme normale d'un jeu à deux joueurs

Définition de la forme normale

- jeu à deux joueurs $\Longrightarrow$ tableau de gains
- matrice de jeu = matrice des gains
- lignes = stratégies du 1er joueur
- colonnes = stratégies du 2ème joueur

Exemple : le dilemme des prisonniers

$$\begin{cases} \text{tous deux nient} \Longrightarrow \text{peines d'1 an} \\ \text{tous deux avouent} \Longrightarrow \text{peines de 8 ans} \\ \text{l'un avoue, l'autre nie} \Longrightarrow \text{peines respectives = 0 an et 10 ans} \end{cases}$$

Bonnie \ Clyde	Nier	Avouer
Nier	(-1,-1)	(-10,0)
Avouer	(0,-10)	(-8,-8)

Jeu à deux joueurs à somme nulle

Définition d'un jeu à deux joueurs à somme nulle

Jeu pour lequel la somme des paiements est toujours égale à 0
$\forall$ stratégies des joueurs

Jeu à deux joueurs à somme nulle

Définition d'un jeu à deux joueurs à somme nulle

Jeu pour lequel la somme des paiements est toujours égale à 0 $\forall$ stratégies des joueurs

Forme normale d'un jeu à deux joueurs à somme nulle

- matrice des gains comme dans le jeu à 2 joueurs classique
- mais on n'écrit que le gain du 1er joueur (celui des lignes)
- gain du 2ème joueur = $-$gain du 1er joueur

Exemple de jeu à deux joueurs à somme nulle

- 3 boites : Noire, Rouge, Verte
- joueur II : répartit 2 pièces de 1 € entre les 3 boites
- joueur I : choisit 1 boite et gagne son contenu

Exemple de jeu à deux joueurs à somme nulle

- 3 boites : Noire, Rouge, Verte
- joueur II : répartit 2 pièces de 1 € entre les 3 boites
- joueur I : choisit 1 boite et gagne son contenu

Matrice de jeu :

joueur I \ joueur II	NN	RR	VV	NR	NV	RV
N	2	0	0	1	1	0
R	0	2	0	1	0	1
V	0	0	2	0	1	1

Jeu à deux joueurs à somme nulle : forme générale

joueur I \ joueur II	1	2	$\cdots$	j_0	$\cdots$	n
1	$g_{1,1}$	$g_{1,2}$	$\cdots$	g_{1,j_0}	$\cdots$	$g_{1,n}$
2	$g_{2,1}$	$g_{2,2}$	$\cdots$	g_{2,j_0}	$\cdots$	$g_{2,n}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
i_0	$g_{i_0,1}$	$g_{i_0,2}$	$\cdots$	g_{i_0,j_0}	$\cdots$	$g_{i_0,n}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
m	$g_{m,1}$	$g_{m,2}$	$\cdots$	g_{m,j_0}	$\cdots$	$g_{m,n}$

⚠ les gains $g_{i,j}$ dépendent des stratégies i et j des joueurs

- $g_{i,j}$ = gain du joueur I
- $-g_{i,j}$ = gain du joueur II

Stratégie des joueurs

Les joueurs choisissent leurs stratégies à l'insu l'un de l'autre

Stratégie des joueurs

Les joueurs choisissent leurs stratégies à l'insu l'un de l'autre

joueur I : stratégie $i_0 \Longrightarrow$ gain minimum $= \min_{j=1}^{n} g_{i_0,j}$

Stratégie des joueurs

Les joueurs choisissent leurs stratégies à l'insu l'un de l'autre

joueur I : stratégie $i_0 \Longrightarrow$ gain minimum $= \min_{j=1}^{n} g_{i_0,j}$

joueur prudent $\Longrightarrow$ rendre ce gain le plus élevé possible

Stratégie des joueurs

Les joueurs choisissent leurs stratégies à l'insu l'un de l'autre

joueur I : stratégie $i_0 \Longrightarrow$ gain minimum $= \min_{j=1}^{n} g_{i_0,j}$

joueur prudent $\Longrightarrow$ rendre ce gain le plus élevé possible

critère MAXIMIN

stratégie du joueur I : stratégie i telle que $\max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} g_{i,j}$

Stratégie des joueurs

Les joueurs choisissent leurs stratégies à l'insu l'un de l'autre

joueur I : stratégie $i_0 \Longrightarrow$ gain minimum $= \min\limits_{j=1}^{n} g_{i_0,j}$

joueur prudent $\Longrightarrow$ rendre ce gain le plus élevé possible

critère MAXIMIN

stratégie du joueur I : stratégie i telle que $\max\limits_{i=1}^{m} \min\limits_{j=1}^{n} g_{i,j}$

second joueur : stratégie $j_0 \Longrightarrow$ perte maximale $= \max\limits_{i=1}^{m} g_{i,j_0}$

joueur prudent $\Longrightarrow$ rendre cette perte la plus petite possible

Stratégie des joueurs

Les joueurs choisissent leurs stratégies à l'insu l'un de l'autre

joueur I : stratégie $i_0 \Longrightarrow$ gain minimum $= \min_{j=1}^{n} g_{i_0,j}$

joueur prudent $\Longrightarrow$ rendre ce gain le plus élevé possible

critère MAXIMIN

stratégie du joueur I : stratégie i telle que $\max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} g_{i,j}$

second joueur : stratégie $j_0 \Longrightarrow$ perte maximale $= \max_{i=1}^{m} g_{i,j_0}$

joueur prudent $\Longrightarrow$ rendre cette perte la plus petite possible

critère MINIMAX

stratégie du joueur II : stratégie j telle que $\min_{j=1}^{n} \max_{i=1}^{m} g_{i,j}$

Théorème du minimax en stratégies pures (1/2)

Théorème du minimax en stratégies pures

$$\max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} g_{i,j} \leq \min_{j=1}^{n} \max_{i=1}^{m} g_{i,j}$$

Théorème du minimax en stratégies pures (1/2)

Théorème du minimax en stratégies pures

$$\max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} g_{i,j} \leq \min_{j=1}^{n} \max_{i=1}^{m} g_{i,j}$$

Démonstration :

$$\forall i, \forall j,\ \min_{j=1}^{n} g_{i,j} \leq g_{i,j}$$

Théorème du minimax en stratégies pures (1/2)

Théorème du minimax en stratégies pures

$$\max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} g_{i,j} \leq \min_{j=1}^{n} \max_{i=1}^{m} g_{i,j}$$

Démonstration :

$$\forall i, \forall j,\ \min_{j=1}^{n} g_{i,j} \leq g_{i,j}$$

$$\forall i, \forall j,\ \min_{j=1}^{n} g_{i,j} \leq g_{i,j}$$

Théorème du minimax en stratégies pures (1/2)

Théorème du minimax en stratégies pures

$$\max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} g_{i,j} \leq \min_{j=1}^{n} \max_{i=1}^{m} g_{i,j}$$

Démonstration :

$$\forall i, \forall j,\ \min_{j=1}^{n} g_{i,j} \leq g_{i,j}$$

$$\forall i, \forall j,\ \min_{j=1}^{n} g_{i,j} \leq \max_{i=1}^{m} g_{i,j}$$

Théorème du minimax en stratégies pures (1/2)

Théorème du minimax en stratégies pures

$$\max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} g_{i,j} \leq \min_{j=1}^{n} \max_{i=1}^{m} g_{i,j}$$

Démonstration :

$$\forall i, \forall j, \ \min_{j=1}^{n} g_{i,j} \leq g_{i,j}$$

$$\forall j, \ \max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} g_{i,j} \leq \max_{i=1}^{m} g_{i,j}$$

Théorème du minimax en stratégies pures

$$\max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} g_{i,j} \leq \min_{j=1}^{n} \max_{i=1}^{m} g_{i,j}$$

Démonstration :

$$\forall i, \forall j, \ \min_{j=1}^{n} g_{i,j} \leq g_{i,j}$$

$$\forall j, \ \max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} g_{i,j} \leq \max_{i=1}^{m} g_{i,j}$$

membre de gauche = constante $\Longrightarrow \max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} g_{i,j} \leq \min_{j=1}^{n} \max_{i=1}^{m} g_{i,j}$

CQFD

Théorème du minimax en stratégies pures (2/2)

⚠ $\max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} g_{i,j} \neq \min_{j=1}^{n} \max_{i=1}^{m} g_{i,j}$:

- 3 boites : Noire, Rouge, Verte
- joueur II : répartit 2 pièces de 1 € entre les 3 boites
- joueur I : choisit 1 boite et gagne son contenu

joueur I \ joueur II	NN	RR	VV	NR	NV	RV	min
N	2	0	0	1	1	0	0
R	0	2	0	1	0	1	0
V	0	0	2	0	1	1	0
max	2	2	2	1	1	1	

Stratégies mixtes / stratégies pure (1/3)

les joueurs ne peuvent être certains d'obtenir plus que ce qu'ils peuvent s'assurer

VON NEUMANN : en moyenne peuvent-ils s'assurer plus ?

$\Longrightarrow$ concept de stratégie mixte

Stratégies mixtes / stratégies pure (1/3)

les joueurs ne peuvent être certains d'obtenir plus que ce qu'ils peuvent s'assurer

VON NEUMANN : en moyenne peuvent-ils s'assurer plus ?

$\Longrightarrow$ concept de stratégie mixte

stratégie mixte

- joueur I : $p = \begin{bmatrix} p^1 \\ p^2 \\ \vdots \\ p^m \end{bmatrix}$ joueur II : $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$
- p = stratégie mixte du joueur I, p^i = proba de jouer la stratégie i
- q = stratégie mixte du joueur II, q_j = proba de jouer la stratégie j

Stratégies mixtes / stratégies pure (2/3)

stratégie pure du joueur I : p = vecteur unité, i.e., $p^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0 \\ 0 & \text{si } i \neq i_0 \end{cases}$

stratégie pure du joueur II : q = vecteur unité, i.e., $q_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = j_0 \\ 0 & \text{si } j \neq j_0 \end{cases}$

Stratégies mixtes / stratégies pure (2/3)

stratégie pure du joueur I : p = vecteur unité, i.e., $p^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0 \\ 0 & \text{si } i \neq i_0 \end{cases}$

stratégie pure du joueur II : q = vecteur unité, i.e., $q_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = j_0 \\ 0 & \text{si } j \neq j_0 \end{cases}$

Ensemble de stratégies mixtes

- $\mathcal{P} = \{$ensemble des stratégies mixtes du 1er joueur$\}$
$$= \left\{ p : p^i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{m} p^i = 1 \right\}$$
- $\mathcal{Q} = \{$ensemble des stratégies mixtes du 2ème joueur$\}$
$$= \left\{ q : q_j \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \right\}$$

Stratégies mixtes / stratégies pure (3/3)

$Pr(\{i,j\})$ = proba que le joueur I joue i et le joueur II joue j

Les joueurs jouent indépendamment $\Longrightarrow$ $\boxed{Pr(\{i,j\}) = p^i q_j}$

Stratégies mixtes / stratégies pure (3/3)

$Pr(\{i,j\})$ = proba que le joueur I joue i et le joueur II joue j

Les joueurs jouent indépendamment $\Longrightarrow$ $\boxed{Pr(\{i,j\}) = p^i q_j}$

espérance mathématique de gain du joueur I

- le joueur I joue la stratégie p
- le joueur II joue la stratégie q
- G = matrice du jeu

Espérance de gain = $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p^i q_j g_{i,j} = p^T G q$

Stratégies mixtes / stratégies pure (3/3)

$Pr(\{i,j\})$ = proba que le joueur I joue i et le joueur II joue j

Les joueurs jouent indépendamment $\Longrightarrow$ $Pr(\{i,j\}) = p^i q_j$

espérance mathématique de gain du joueur I

- le joueur I joue la stratégie p
- le joueur II joue la stratégie q
- G = matrice du jeu

Espérance de gain = $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p^i q_j g_{i,j} = p^T G q$

à partir de maintenant : les joueurs veulent optimiser leur espérance de gain

Minimax et maximin en stratégies mixtes

Minimax et maximin en stratégies mixtes

$$\text{MAXIMIN} = \max_{p \in \mathcal{P}} \min_{q \in \mathcal{Q}} p^T G q$$

$$\text{MINIMAX} = \min_{q \in \mathcal{Q}} \max_{p \in \mathcal{P}} p^T G q$$

- MAXIMIN = espérance de gain minimale du joueur I
- MINIMAX = espérance de perte maximale du joueur II

Minimax et maximin en stratégies mixtes

Minimax et maximin en stratégies mixtes

$$\text{MAXIMIN} = \max_{p \in \mathcal{P}} \min_{q \in \mathcal{Q}} p^T G q$$

$$\text{MINIMAX} = \min_{q \in \mathcal{Q}} \max_{p \in \mathcal{P}} p^T G q$$

- MAXIMIN = espérance de gain minimale du joueur I
- MINIMAX = espérance de perte maximale du joueur II

En stratégies pures, MAXIMIN $\leq$ MINIMAX

Théorème du Minimax en stratégies mixtes

Théorème du minimax (von Neumann)

Dans tout jeu à deux joueurs à somme nulle, le minimax et le maximin en stratégies mixtes sont égaux, i.e.,

$$\max_{p \in \mathcal{P}} \min_{q \in \mathcal{Q}} p^T G q = \min_{q \in \mathcal{Q}} \max_{p \in \mathcal{P}} p^T G q$$

Démonstration du théorème du minimax (1/6)

Démonstration :

- démonstration de $\max_{p \in \mathcal{P}} \min_{q \in \mathcal{Q}} p^T G q \leq \min_{q \in \mathcal{Q}} \max_{p \in \mathcal{P}} p^T G q$:

  $\Longrightarrow$ identique à la démo du théorème en stratégies pures

Démonstration du théorème du minimax (1/6)

Démonstration :

- démonstration de $\max_{p \in \mathcal{P}} \min_{q \in \mathcal{Q}} p^T Gq \leq \min_{q \in \mathcal{Q}} \max_{p \in \mathcal{P}} p^T Gq$:

  $\Longrightarrow$ identique à la démo du théorème en stratégies pures

- G_i^T = ligne i de la matrice du jeu
- G^j = colonne j de la matrice du jeu

Démonstration du théorème du minimax (1/6)

Démonstration :

- démonstration de $\max_{p \in \mathcal{P}} \min_{q \in \mathcal{Q}} p^T Gq \leq \min_{q \in \mathcal{Q}} \max_{p \in \mathcal{P}} p^T Gq$:

  $\Longrightarrow$ identique à la démo du théorème en stratégies pures

- G_i^T = ligne i de la matrice du jeu
- G^j = colonne j de la matrice du jeu
- Montrons que ce qu'un joueur peut s'assurer en espérance contre les stratégies pures de l'adversaire, il peut aussi l'assurer contre les stratégies mixtes, i.e.,

$$\max_{p \in \mathcal{P}} \min_{q \in \mathcal{Q}} p^T Gq = \max_{p \in \mathcal{P}} \min_{j=1}^{n} p^T G^j = \min_{q \in \mathcal{Q}} \max_{i=1}^{m} G_i^T q$$

Démonstration du théorème du minimax (2/6)

Soit p une stratégie mixte quelconque

Démonstration de $\min_{q \in \mathcal{Q}} p^T G q = \min_{j=1}^{n} p^T G^j$:

stratégie pure = stratégie mixte particulière

$$\Longrightarrow \min_{q \in \mathcal{Q}} p^T G q \leq \min_{j=1}^{n} p^T G^j$$

Soit p une stratégie mixte quelconque

Démonstration de $\min_{q \in \mathcal{Q}} p^T G q = \min_{j=1}^{n} p^T G^j$:

stratégie pure = stratégie mixte particulière

$$\Longrightarrow \min_{q \in \mathcal{Q}} p^T G q \leq \min_{j=1}^{n} p^T G^j$$

Réciproquement : si $\forall j,\ p^T G^j \geq \mu$ alors :

$$\forall q,\ p^T G q = p^T \sum_{j=1}^{n} G^j q_j = \sum_{j=1}^{n} \left[p^T G^j \right] q_j \geq \sum_{j=1}^{n} \mu q_j = \mu$$

Démonstration du théorème du minimax (2/6)

Soit p une stratégie mixte quelconque

Démonstration de $\min_{q \in \mathcal{Q}} p^T G q = \min_{j=1}^{n} p^T G^j$:

stratégie pure = stratégie mixte particulière

$$\Longrightarrow \min_{q \in \mathcal{Q}} p^T G q \leq \min_{j=1}^{n} p^T G^j$$

Réciproquement : si $\forall j$, $p^T G^j \geq \mu$ alors :

$$\forall q,\ p^T G q = p^T \sum_{j=1}^{n} G^j q_j = \sum_{j=1}^{n} \left[p^T G^j \right] q_j \geq \sum_{j=1}^{n} \mu q_j = \mu$$

de même : $\max_{p \in \mathcal{P}} p^T G q = \max_{i=1}^{m} G_i^T q$

Démonstration du théorème du minimax (3/6)

Résumé du transparent précédent :

Soit p une stratégie mixte quelconque

alors :

$$\min_{q \in \mathcal{Q}} p^T G q = \min_{j=1}^{n} p^T G^j \text{ et } \max_{p \in \mathcal{P}} p^T G q = \max_{i=1}^{m} G_i^T q$$

Démonstration du théorème du minimax (3/6)

Résumé du transparent précédent :

Soit p une stratégie mixte quelconque

alors :

$$\min_{q\in\mathcal{Q}} p^T G q = \min_{j=1}^{n} p^T G^j \text{ et } \max_{p\in\mathcal{P}} p^T G q = \max_{i=1}^{m} G_i^T q$$

vrai quel que soit p donc :

$$\max_{p\in\mathcal{P}} \min_{q\in\mathcal{Q}} p^T G q = \max_{p\in\mathcal{P}} \min_{j=1}^{n} p^T G^j$$

$$\min_{q\in\mathcal{Q}} \max_{p\in\mathcal{P}} p^T G q = \min_{q\in\mathcal{Q}} \max_{i=1}^{m} G_i^T q$$

Démonstration du théorème du minimax (4/6)

Démonstration par l'absurde de $\textsc{minimax} \leq \textsc{maximin}$:

Supposons que $\textsc{maximin} < \textsc{minimax}$

Démonstration du théorème du minimax (4/6)

Démonstration par l'absurde de MINIMAX $\leq$ MAXIMIN :

Supposons que MAXIMIN $<$ MINIMAX

Soit α tel que MAXIMIN $< \alpha <$ MINIMAX

Démonstration du théorème du minimax (4/6)

Démonstration par l'absurde de MINIMAX $\leq$ MAXIMIN :

Supposons que MAXIMIN $<$ MINIMAX

Soit α tel que MAXIMIN $< \alpha <$ MINIMAX

Or MAXIMIN $= \max_{p \in \mathcal{P}} \min_{j=1}^{n} p^T G^j$ (cf. transparent précédent)

Démonstration du théorème du minimax (4/6)

Démonstration par l'absurde de MINIMAX $\leq$ MAXIMIN :

Supposons que MAXIMIN $<$ MINIMAX

Soit α tel que MAXIMIN $< \alpha <$ MINIMAX

Or MAXIMIN $= \max_{p \in \mathcal{P}} \min_{j=1}^{n} p^T G^j$ (cf. transparent précédent)

donc $\forall$ stratégie mixte p, $\min_{j=1}^{n} p^T G^j < \alpha$

Démonstration par l'absurde de MINIMAX $\leq$ MAXIMIN :

Supposons que MAXIMIN $<$ MINIMAX

Soit α tel que MAXIMIN $< \alpha <$ MINIMAX

Or MAXIMIN $= \max_{p \in \mathcal{P}} \min_{j=1}^{n} p^T G^j$ (cf. transparent précédent)

donc $\forall$ stratégie mixte p, $\min_{j=1}^{n} p^T G^j < \alpha$

donc $\nexists p$ telle que $\forall j$, $p^T G^j \geq \alpha$

donc le système $\left\{ \begin{array}{l} p^T G^j \geq \alpha \ \forall j \\ p^T 1_m = 1 \\ p^i \geq 0 \forall i \end{array} \right.$ est incompatible

où 1_m = vecteur de taille m constitué uniquement de 1

Démonstration du théorème du minimax (5/6)

$$\begin{cases} p^T G^j \geq \alpha \; \forall j \\ p^T 1_m = 1 \\ p^i \geq 0 \forall i \end{cases} \iff \begin{cases} p^T G \geq \alpha_n \\ p^T 1_m \geq 1 \\ -p^T 1_m \geq -1 \\ p^T I_m \geq 0_m \end{cases} \iff \begin{cases} p^T(-G) \leq -\alpha_n \\ p^T(-1_m) \leq -1 \\ p^T 1_m \leq 1 \\ p^T(-I_m) \leq 0_m \end{cases}$$

où I_m = matrice identité et α_n = vecteur constitué de n α

Démonstration du théorème du minimax (5/6)

$$\left\{\begin{array}{r} p^T G^j \geq \alpha\ \forall j \\ p^T 1_m = 1 \\ p^i \geq 0 \forall i \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} p^T G \geq \alpha_n \\ p^T 1_m \geq 1 \\ -p^T 1_m \geq -1 \\ p^T I_m \geq 0_m \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} p^T(-G) \leq -\alpha_n \\ p^T(-1_m) \leq -1 \\ p^T 1_m \leq 1 \\ p^T(-I_m) \leq 0_m \end{array}\right.$$

où I_m = matrice identité et α_n = vecteur constitué de n α

Rappel : théorème de l'alternative

un et un seul des énoncés suivants est vrai :

1. il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
2. il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$

Démonstration du théorème du minimax (5/6)

$$\begin{cases} p^T G^j \geq \alpha \ \forall j \\ p^T 1_m = 1 \\ p^i \geq 0 \forall i \end{cases} \iff \begin{cases} p^T G \geq \alpha_n \\ p^T 1_m \geq 1 \\ -p^T 1_m \geq -1 \\ p^T I_m \geq 0_m \end{cases} \iff \begin{cases} p^T(-G) \leq -\alpha_n \\ p^T(-1_m) \leq -1 \\ p^T 1_m \leq 1 \\ p^T(-I_m) \leq 0_m \end{cases}$$

où I_m = matrice identité et α_n = vecteur constitué de n α

Rappel : théorème de l'alternative

un et un seul des énoncés suivants est vrai :

1. il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
2. il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$

$$A = [-G \quad -1_m \quad 1_m \quad -I_m] \quad \text{et} \quad c^T = [-\alpha_n^T \quad -1 \quad 1 \quad 0_m^T]$$

$\Longrightarrow \nexists p$ tel que $p^T A \leq c^T$

$\Longrightarrow \exists x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$

Démonstration du théorème du minimax (6/6)

$$A = [-G \quad -1_m \quad 1_m \quad -I_m] \quad \text{et} \quad c^T = [-\alpha_n^T \quad -1 \quad 1 \quad 0_m^T]$$

$$\exists x = \begin{bmatrix} y \\ z' \\ z'' \\ d \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0_n \\ 0 \\ 0 \\ 0_m \end{bmatrix} \text{ tel que } Ax = 0 \text{ et } c^T x < 0$$

Démonstration du théorème du minimax (6/6)

$$A = [-G \quad -1_m \quad 1_m \quad -I_m] \quad \text{et} \quad c^T = [-\alpha_n^T \quad -1 \quad 1 \quad 0_m^T]$$

$$\exists x = \begin{bmatrix} y \\ z' \\ z'' \\ d \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0_n \\ 0 \\ 0 \\ 0_m \end{bmatrix} \text{ tel que } Ax = 0 \text{ et } c^T x < 0$$

$$\Longrightarrow \text{système} \begin{cases} c^T x = -\alpha_n^T y - z' + z'' < 0 \\ Ax \ = -Gy - 1_m z' + 1_m z'' - I_m d = 0_m \\ y \geq 0_n,\ z' \geq 0,\ z'' \geq 0,\ d \geq 0_m \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \text{système} \begin{cases} \alpha_n^T y + z' - z'' > 0 \\ Gy + 1_m z' - 1_m z'' + I_m d = 0_m \\ y \geq 0_n,\ z' \geq 0,\ z'' \geq 0,\ d \geq 0_m \end{cases}$$

$$A = [-G \quad -1_m \quad 1_m \quad -I_m] \quad \text{et} \quad c^T = [-\alpha_n^T \quad -1 \quad 1 \quad 0_m^T]$$

$$\exists x = \begin{bmatrix} y \\ z' \\ z'' \\ d \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0_n \\ 0 \\ 0 \\ 0_m \end{bmatrix} \text{ tel que } Ax = 0 \text{ et } c^T x < 0$$

$$\Longrightarrow \text{système} \begin{cases} c^T x = -\alpha_n^T y - z' + z'' < 0 \\ Ax \quad = -Gy - 1_m z' + 1_m z'' - I_m d = 0_m \\ y \geq 0_n, \ z' \geq 0, \ z'' \geq 0, \ d \geq 0_m \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \text{système} \begin{cases} \alpha_n^T y + z' - z'' > 0 \\ Gy + 1_m z' - 1_m z'' + I_m d = 0_m \\ y \geq 0_n, \ z' \geq 0, \ z'' \geq 0, \ d \geq 0_m \end{cases}$$

$$\Longrightarrow Gy \leq 1_m(z'' - z') \leq 1_m \alpha_n^T y \Longrightarrow \exists q \text{ t.q. } Gq \leq 1_m \alpha_n^T q = 1_m \alpha = \alpha_m$$

Démonstration du théorème du minimax (6/6)

$$A = [-G \quad -1_m \quad 1_m \quad -I_m] \quad \text{et} \quad c^T = [-\alpha_n^T \quad -1 \quad 1 \quad 0_m^T]$$

$$\exists x = \begin{bmatrix} y \\ z' \\ z'' \\ d \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0_n \\ 0 \\ 0 \\ 0_m \end{bmatrix} \text{ tel que } Ax = 0 \text{ et } c^T x < 0$$

$$\Longrightarrow \text{système} \begin{cases} c^T x = -\alpha_n^T y - z' + z'' < 0 \\ Ax \ = -Gy - 1_m z' + 1_m z'' - I_m d = 0_m \\ y \geq 0_n,\ z' \geq 0,\ z'' \geq 0,\ d \geq 0_m \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \text{système} \begin{cases} \alpha_n^T y + z' - z'' > 0 \\ Gy + 1_m z' - 1_m z'' + I_m d = 0_m \\ y \geq 0_n,\ z' \geq 0,\ z'' \geq 0,\ d \geq 0_m \end{cases}$$

$$\Longrightarrow Gy \leq 1_m(z'' - z') \leq 1_m \alpha_n^T y \Longrightarrow \exists q \text{ t.q. } Gq \leq 1_m \alpha_n^T q = 1_m \alpha = \alpha_m$$

$$\Longrightarrow G_i q \leq \alpha \ \forall i \Longrightarrow \text{contradiction de notre hypothèse de départ}$$

Théorème du Minimax en stratégies mixtes

Théorème du minimax (von Neumann)

Dans tout jeu à deux joueurs à somme nulle, le minimax et le maximin en stratégies mixtes sont égaux, i.e.,

$$\max_{p \in \mathcal{P}} \min_{q \in \mathcal{Q}} p^T G q = \min_{q \in \mathcal{Q}} \max_{p \in \mathcal{P}} p^T G q$$

$\Longrightarrow$ théorème de dualité