Cours 7 : applications théoriques de la programmation linéaire

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

Plan du cours

Théorème de l'alternative

- A une matrice $m \times n$
- c un vecteur de taille n
- un et un seul des énoncés suivants est vrai :
  1. il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
  2. il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$

⚠ Rappel : les vecteurs sont tous par défaut en colonne

1. il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
2. il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$

Démonstration :

démo de 1 $\Longrightarrow$ non 2 :

supposons 1 alors le PL suivant a un optimum :

max $v^T.0$

$$s.c. \begin{cases} v^T A + d^T = c^T \\ d^T \geq 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ dual a un optimum :

min $c^T x$

$$s.c. \begin{cases} Ax = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

valeur du dual = valeur du primal $\Longrightarrow c^T x \not< 0 \Longrightarrow$ non 2

Théorème de l'alternative (3/3)

1. il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
2. il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$

Démo de non 2 $\Longrightarrow$ 1 :

On sait que $S = \{x : Ax = 0, \; x \geq 0\} \neq \emptyset$ car contient 0.

Non 2 $\Longrightarrow c^T x \geq 0$ pour tout $x \in S$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \min c^T x \\ s.c. \begin{cases} Ax = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

a une solution, de valeur 0 $\Longrightarrow$ dual a une solution :

$$\begin{array}{l} \max v^T.0 \\ s.c. \begin{cases} v^T A + d^T = c^T \\ d^T \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

$\Longrightarrow$ il existe v tel que $v^T A \leq c^T \Longrightarrow$ 1 CQFD

Lemme de Farkas (1/5)

Lemme de Farkas

- A une matrice $m \times n$
- c un vecteur de taille n
- les deux énoncés suivants sont équivalents :
  1. $Ax \geq 0 \Longrightarrow c^T x \geq 0$
  2. il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

Lemme de Farkas (2/5)

1. $Ax \geq 0 \Longrightarrow c^T x \geq 0$
2. il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

Démonstration :

démo de 2 $\Longrightarrow$ 1 :

Soit $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$. Supposons que $Ax \geq 0$

alors $v \geq 0$ et $Ax \geq 0 \Longrightarrow v^T Ax \geq 0$

Or $v^T A = c^T \Longrightarrow v^T Ax = c^T x \geq 0 \Longrightarrow$ 1

Lemme de Farkas (3/5)

1. $Ax \geq 0 \Longrightarrow c^T x \geq 0$
2. il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

---

démo de 1 $\Longrightarrow$ 2 :

Soit le PL :

$\min c^T x$

$s.c.\ Ax \geq 0$

Pas de contraintes sur le signe de $x \Longrightarrow$ équivalent à :

$\min c^T x' - c^T x''$

$$s.c. \begin{cases} Ax' - Ax'' \geq 0 \\ x' \geq 0,\ x'' \geq 0 \end{cases}$$

Lemme de Farkas (4/5)

$$\min c^T x' - c^T x''$$
$$s.c. \begin{cases} Ax' - Ax'' \geq 0 \\ x' \geq 0, \; x'' \geq 0 \end{cases}$$

a pour dual :

$$\max v^T.0$$
$$s.c. \begin{cases} v^T A \geq c^T \\ v^T(-A) \geq -c^T \\ v \geq 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à :

$$\max v^T.0$$
$$s.c. \begin{cases} v^T A = c^T \\ v \geq 0 \end{cases}$$

Lemme de Farkas (5/5)

1. $Ax \geq 0 \Longrightarrow c^T x \geq 0$
2. il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

PL1 : $\min c^T x$

$\quad\quad s.c.\ Ax \geq 0$

a donc pour dual :

PL2 : $\max v^T.0$

$$s.c. \begin{cases} v^T A = c^T \\ v \geq 0 \end{cases}$$

Or, d'après 1, PL1 minoré par 0, atteint pour $x = 0$

Théorème de la dualité : PL2 a une solution optimale = 0

$\Longrightarrow$ il existe v_* tel que $v_* \geq 0$ et $v_*^T A = c^T \Longrightarrow$ 2

CQFD