

Cours 7 : applications théoriques de la programmation linéaire

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

- 1 Théorème de l'alternative
- 2 Lemme de Farkas

Théorème de l'alternative

- A une matrice $m \times n$
- c un vecteur de taille n
- un et un seul des énoncés suivants est vrai :
 - 1 il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
 - 2 il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$



Rappel : les vecteurs sont tous par défaut en colonne

Théorème de l'alternative (2/3)

- ① il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
 - ② il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$
-

Démonstration :

démo de ① \implies non ② :

supposons ① alors le PL suivant a un optimum :

$$\max v^T \cdot 0$$

$$\text{s.c. } \begin{cases} v^T A + d^T = c^T \\ d^T \geq 0 \end{cases}$$

Théorème de l'alternative (2/3)

- ① il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
 - ② il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$
-

Démonstration :

démo de ① \implies non ② :

supposons ① alors le PL suivant a un optimum :

$$\max v^T \cdot 0$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} v^T A + d^T = c^T \\ d^T \geq 0 \end{cases}$$

\implies dual a un optimum :

$$\min c^T x$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} Ax = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Théorème de l'alternative (2/3)

- 1 il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
 - 2 il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$
-

Démonstration :

démo de 1 \implies non 2 :

supposons 1 alors le PL suivant a un optimum :

$$\max v^T \cdot 0$$

$$\text{s.c. } \begin{cases} v^T A + d^T = c^T \\ d^T \geq 0 \end{cases}$$

\implies dual a un optimum :

$$\min c^T x$$

$$\text{s.c. } \begin{cases} Ax = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

valeur du dual = valeur du primal $\implies c^T x \not< 0 \implies$ non 2

Théorème de l'alternative (3/3)

- ① il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
 - ② il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$
-

Démo de non ② \implies ① :

On sait que $S = \{x : Ax = 0, x \geq 0\} \neq \emptyset$ car contient 0.

Non ② $\implies c^T x \geq 0$ pour tout $x \in S$

Théorème de l'alternative (3/3)

- ❶ il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
 - ❷ il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$
-

Démo de non ❷ \implies ❶ :

On sait que $S = \{x : Ax = 0, x \geq 0\} \neq \emptyset$ car contient 0.

Non ❷ $\implies c^T x \geq 0$ pour tout $x \in S$

$$\begin{aligned} \implies \min c^T x \\ \text{s.c. } \begin{cases} Ax = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

a une solution, de valeur 0

Théorème de l'alternative (3/3)

- ① il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
 - ② il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$
-

Démo de non ② \implies ① :

On sait que $S = \{x : Ax = 0, x \geq 0\} \neq \emptyset$ car contient 0.

Non ② $\implies c^T x \geq 0$ pour tout $x \in S$

$$\begin{aligned} \implies & \min c^T x \\ & \text{s.c. } \begin{cases} Ax = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

a une solution, de valeur 0 \implies dual a une solution :

$$\begin{aligned} & \max v^T \cdot 0 \\ & \text{s.c. } \begin{cases} v^T A + d^T = c^T \\ d^T \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Théorème de l'alternative (3/3)

- ① il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
 - ② il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$
-

Démo de non ② \implies ① :

On sait que $S = \{x : Ax = 0, x \geq 0\} \neq \emptyset$ car contient 0.

Non ② $\implies c^T x \geq 0$ pour tout $x \in S$

$$\begin{aligned} \implies \min c^T x \\ \text{s.c. } \begin{cases} Ax = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

a une solution, de valeur 0 \implies dual a une solution :

$$\begin{aligned} \max v^T \cdot 0 \\ \text{s.c. } \begin{cases} v^T A + d^T = c^T \\ d^T \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

\implies il existe v tel que $v^T A \leq c^T \implies$ ①

CQFD

Lemme de Farkas

- A une matrice $m \times n$
- c un vecteur de taille n
- les deux énoncés suivants sont équivalents :
 - 1 $Ax \geq 0 \implies c^T x \geq 0$
 - 2 il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

- 1 $Ax \geq 0 \implies c^T x \geq 0$
 - 2 il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$
-

Démonstration :

démo de 2 \implies 1 :

Soit $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$. Supposons que $Ax \geq 0$

alors $v \geq 0$ et $Ax \geq 0 \implies v^T Ax \geq 0$

Or $v^T A = c^T \implies v^T Ax = c^T x \geq 0 \implies$ 1

Lemme de Farkas (3/5)

① $Ax \geq 0 \implies c^T x \geq 0$

② il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

démo de ① \implies ② :

Soit le PL :

$$\min c^T x$$

$$\text{s.c. } Ax \geq 0$$

Lemme de Farkas (3/5)

① $Ax \geq 0 \implies c^T x \geq 0$

② il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

démo de ① \implies ② :

Soit le PL :

$$\min c^T x$$

$$\text{s.c. } Ax \geq 0$$

Pas de contraintes sur le signe de x

Lemme de Farkas (3/5)

① $Ax \geq 0 \implies c^T x \geq 0$

② il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

démo de ① \implies ② :

Soit le PL :

$$\min c^T x$$

$$\text{s.c. } Ax \geq 0$$

Pas de contraintes sur le signe de $x \implies$ équivalent à :

$$\min c^T x' - c^T x''$$

$$\text{s.c. } \begin{cases} Ax' - Ax'' \geq 0 \\ x' \geq 0, x'' \geq 0 \end{cases}$$

Lemme de Farkas (4/5)

$$\begin{aligned} & \min c^T x' - c^T x'' \\ \text{s.c. } & \begin{cases} Ax' - Ax'' \geq 0 \\ x' \geq 0, x'' \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

a pour dual :

$$\begin{aligned} & \max v^T .0 \\ \text{s.c. } & \begin{cases} v^T A \geq c^T \\ v^T (-A) \geq -c^T \\ v \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Lemme de Farkas (4/5)

$$\begin{aligned} & \min c^T x' - c^T x'' \\ \text{s.c. } & \begin{cases} Ax' - Ax'' \geq 0 \\ x' \geq 0, x'' \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

a pour dual :

$$\begin{aligned} & \max v^T .0 \\ \text{s.c. } & \begin{cases} v^T A \geq c^T \\ v^T (-A) \geq -c^T \\ v \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} & \max v^T .0 \\ \text{s.c. } & \begin{cases} v^T A = c^T \\ v \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Lemme de Farkas (5/5)

① $Ax \geq 0 \implies c^T x \geq 0$

② il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

PL1 : $\min c^T x$

s.c. $Ax \geq 0$

a donc pour dual :

PL2 : $\max v^T .0$

s.c. $\begin{cases} v^T A = c^T \\ v \geq 0 \end{cases}$

Lemme de Farkas (5/5)

- 1 $Ax \geq 0 \implies c^T x \geq 0$
 - 2 il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$
-

$$\text{PL1 : } \min c^T x \\ \text{s.c. } Ax \geq 0$$

a donc pour dual :

$$\text{PL2 : } \max v^T .0 \\ \text{s.c. } \begin{cases} v^T A = c^T \\ v \geq 0 \end{cases}$$

Or, d'après 1, PL1 minoré par 0, atteint pour $x = 0$

Lemme de Farkas (5/5)

① $Ax \geq 0 \implies c^T x \geq 0$

② il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

PL1 : $\min c^T x$

s.c. $Ax \geq 0$

a donc pour dual :

PL2 : $\max v^T .0$

s.c. $\begin{cases} v^T A = c^T \\ v \geq 0 \end{cases}$

Or, d'après ①, PL1 minoré par 0, atteint pour $x = 0$

Théorème de la dualité : PL2 a une solution optimale = 0

Lemme de Farkas (5/5)

- 1 $Ax \geq 0 \implies c^T x \geq 0$
 - 2 il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$
-

$$\text{PL1 : } \min c^T x \\ \text{s.c. } Ax \geq 0$$

a donc pour dual :

$$\text{PL2 : } \max v^T .0 \\ \text{s.c. } \begin{cases} v^T A = c^T \\ v \geq 0 \end{cases}$$

Or, d'après 1, PL1 minoré par 0, atteint pour $x = 0$

Théorème de la dualité : PL2 a une solution optimale = 0

\implies il existe v_* tel que $v_* \geq 0$ et $v_*^T A = c^T \implies$ 2

CQFD