Cours 5 : Phase I – Phase 2

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

Problème d'initialisation de l'algo du simplexe

Problème de départ :

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_1 - x_2 \\ s.c. & -2x_1 - 3x_2 \leq -19 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 32 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Introduction des variables d'écart :

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_1 - x_2 \\ s.c. & -2x_1 - 3x_2 + \boxed{x_3 } = -19 \\ & 3x_1 + 4x_2 + \boxed{ + x_4} = 32 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Base évidente : x_3, x_4 non réalisable !!!!!!!!

Comment initialiser l'algo du simplexe ? (1/4)

Problème avec variables d'écart :

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_1 - x_2 \\ s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -19 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 32 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Introduction de variables artificielles :

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_1 - x_2 \\ s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = -19 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 32 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

$\Longrightarrow$ nouvelle base réalisable évidente : x_4, x_5

Simplexe $\Longrightarrow$ si $x_5 = 0$ alors optimum du problème de départ

Comment initialiser l'algo du simplexe ? (2/4)

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_1 - x_2 \\ s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = -19 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 32 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Assurer que $x_5 = 0$:

$$\begin{array}{ll} \min & x_5 \\ s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = -19 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 32 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Problème d'origine réalisable ssi min $x_5 \Longrightarrow x_5 = 0$

Phase I : résolution du problème min x_5

Comment initialiser l'algo du simplexe ? (3/4)

Résolution du problème :

$$\begin{array}{ll} \min & x_5 \\ s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = -19 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 32 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Expression en fonction des variables hors base :

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 19 \\ s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = -19 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 32 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Résolution : faire entrer x_2 et sortir x_5 :

$$\begin{array}{ll} \max & - x_5 \\ s.c. & \frac{2}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{19}{3} \\ & \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_3 + x_4 - \frac{4}{3}x_5 = \frac{20}{3} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Variables en base : x_2, x_4
$\Longrightarrow x_5 = 0$
$(x_1 = 0, x_2 = \frac{19}{3}, x_3 = 0, x_4 = \frac{20}{3})$ = solution réalisable du problème d'origine

Comment initialiser l'algo du simplexe ? (4/4)

Dernière itération du simplexe :

$$\begin{array}{ll} \max & - x_5 \\ s.c. & \frac{2}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{19}{3} \\ & \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_3 + x_4 - \frac{4}{3}x_5 = \frac{20}{3} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

$x_5 = 0$
$\Longrightarrow$ on peut supprimer x_5 des équations

Retour sur le problème d'origine :

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_1 - x_2 \\ s.c. & \frac{2}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 = \frac{19}{3} \\ & \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_3 + x_4 = \frac{20}{3} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Algo du simplexe sur ce problème : phase II

Phase I – phase 2 (1/5)

Problème d'origine (après introduction des variables d'écart) :

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{array} \right.$$

Introduction des variables artificielles :

$x_{n+1} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0$ telles que :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i x_{n+i} = b_i, \text{ où } w_i = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } b_i \geq 0 \\ -1 \text{ si } b_i < 0 \end{array} \right.$$

si $b_i \geq 0$: variables d'écart $\Longrightarrow$ variables artificielles inutiles

Phase I – phase 2 (2/5)

Nouveau simplexe :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n+m) \end{array} \right.$$

Solution réalisable :

$$x_j = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } j \leq n \\ b_i / w_i & \text{si } j > n \end{array} \right.$$

Phase I – phase 2 (3/5)

Détermination d'une solution réalisable du problème d'origine :

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n+m) \end{cases}$$

Proposition

Le problème d'origine a une solution réalisable si et seulement si le problème ci-dessus a une solution dont la valeur (fonction objectif) vaut 0

Phase I – phase 2 (4/5)

Début de la phase 2 :

si $\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} > 0$ alors problème d'origine non réalisable

sinon tableau simplexe :

$\Longrightarrow$ solution réalisable $(x_1^*, \ldots, x_{n+m}^*)$ telle que $x_{n+i}^* = 0 \; \forall i = 1, \ldots, m$

Problème d'origine équivalent à :

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ x_{n+i} = 0 & (i = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

Phase I – phase 2 (5/5)

Résolution du problème d'origine :

1. supprimer toutes les variables artificielles hors base

   il peut rester des variables artificielles en base (présence de contraintes redondantes)

2. résoudre avec l'algo du simplexe et variable artificielle sort de la base $\Longrightarrow$ la supprimer du problème à résoudre $\Longrightarrow$ élimination progressive des variables artificielles

Variation de la phase I

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n+m) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ ne tient pas compte de la fonction objectif

$\Longrightarrow$ risque d'obtenir une solution réalisable très éloignée de l'optimum du problème d'origine

la méthode «big M»

1. choisir un M très grand
2. résoudre $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$ au lieu de $\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$