Cours 5 : Phase I – Phase 2

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

Problème de départ :

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & -2x_1 & - & x_2 & & \\ s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & \leq & -19 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 32 \\ & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geq 0} \end{array}$$

Introduction des variables d'écart :

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & -2x_1 & - & x_2 & & \\ s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + & \boxed{\begin{array}{ll} x_3 & \\ & + x_4 \end{array}} \begin{array}{rr} = & -19 \\ = & 32 \end{array} \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & & \\ & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0} \end{array}$$

Base évidente : x_3, x_4 ⚠ non réalisable ! ! ! ! ! ! ! !

Problème avec variables d'écart :

$$
\begin{array}{llll}
\max & -2x_1 - x_2 & & \\
s.c. & -2x_1 - 3x_2 + \boxed{\begin{array}{ll} x_3 & \\ & + x_4 \end{array}} & = & -19 \\
 & 3x_1 + 4x_2 & = & 32 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Introduction de variables artificielles :

$$
\begin{array}{llll}
\max & -2x_1 - x_2 & & \\
s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 \quad \boxed{\begin{array}{ll} & {\color{red}-\ x_5} \\ x_4 & \end{array}} & = & -19 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \qquad + & = & 32 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & &
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$ nouvelle base réalisable évidente : x_4, x_5

Simplexe $\Longrightarrow$ si $x_5 = 0$ alors optimum du problème de départ

$$
\begin{array}{llcl}
\max & -2x_1 - x_2 & & \\
s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 & = & -19 \\
& 3x_1 + 4x_2 + x_4 & = & 32 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Assurer que $x_5 = 0$:

$$
\begin{array}{llcl}
\min & x_5 & & \\
s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 & = & -19 \\
& 3x_1 + 4x_2 + x_4 & = & 32 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Problème d'origine réalisable ssi $\min x_5 \Longrightarrow x_5 = 0$

Phase I : résolution du problème $\min x_5$

Résolution du problème :

$$\begin{array}{lrcl}
\min & & & x_5 \\
s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 & - x_5 = & -19 \\
 & 3x_1 + 4x_2 + x_4 & = & 32 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & &
\end{array}$$

Expression en fonction des variables hors base :

$$\begin{array}{lrcl}
\max & 2x_1 + 3x_2 - x_3 & - & 19 \\
s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 & - x_5 = & -19 \\
 & 3x_1 + 4x_2 + x_4 & = & 32 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & &
\end{array}$$

Résolution : faire entrer x_2 et sortir x_5 :

$$\begin{array}{lrcl}
\max & & - & x_5 \\
s.c. & \frac{2}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 & + \frac{1}{3}x_5 = & \frac{19}{3} \\
 & \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_3 + x_4 & - \frac{4}{3}x_5 = & \frac{20}{3} \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & &
\end{array}$$

Variables en base : x_2, x_4
$\Longrightarrow x_5 = 0$
$(x_1 = 0, x_2 = \frac{19}{3}, x_3 = 0, x_4 = \frac{20}{3})$ = solution réalisable du problème d'origine

Dernière itération du simplexe :

$$
\begin{array}{llllllll}
\max & & & & & - & x_5 & \\
s.c. & \frac{2}{3}x_1 & + x_2 & - \frac{1}{3}x_3 & & + & \frac{1}{3}x_5 & = \frac{19}{3} \\
 & \frac{1}{3}x_1 & & + \frac{4}{3}x_3 & + x_4 & - & \frac{4}{3}x_5 & = \frac{20}{3} \\
 & \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

$x_5 = 0$
$\Longrightarrow$ on peut supprimer x_5 des équations

Retour sur le problème d'origine :

$$
\begin{array}{llllll}
\max & -2x_1 & - x_2 & & & \\
s.c. & \frac{2}{3}x_1 & + x_2 & - \frac{1}{3}x_3 & & = \frac{19}{3} \\
 & \frac{1}{3}x_1 & & + \frac{4}{3}x_3 & + x_4 & = \frac{20}{3} \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0}
\end{array}
$$

Algo du simplexe sur ce problème : phase II

Problème d'origine (après introduction des variables d'écart) :

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Introduction des variables artificielles :

$x_{n+1} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0$ telles que :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i x_{n+i} = b_i, \text{ où } w_i = \begin{cases} 1 \text{ si } b_i \geq 0 \\ -1 \text{ si } b_i < 0 \end{cases}$$

⚠ si $b_i \geq 0$: variables d'écart $\Longrightarrow$ variables artificielles inutiles

Nouveau simplexe :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n+m) \end{array} \right.$$

Solution réalisable :

$$x_j = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } j \leq n \\ b_i/w_i & \text{si } j > n \end{array} \right.$$

Phase I – phase 2 (3/5)

Détermination d'une solution réalisable du problème d'origine :

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n+m) \end{cases}$$

Proposition

Le problème d'origine a une solution réalisable si et seulement si le problème ci-dessus a une solution dont la valeur (fonction objectif) vaut 0

Début de la phase 2 :

si $\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} > 0$ alors problème d'origine non réalisable

sinon tableau simplexe :

$\Longrightarrow$ solution réalisable $(x_1^*, \ldots, x_{n+m}^*)$ telle que $x_{n+i}^* = 0 \; \forall i = 1, \ldots, m$

Problème d'origine équivalent à :

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ x_{n+i} = 0 & (i = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

Résolution du problème d'origine :

1. supprimer toutes les variables artificielles hors base

⚠ il peut rester des variables artificielles en base (présence de contraintes redondantes)

2. résoudre avec l'algo du simplexe et variable artificielle sort de la base $\Longrightarrow$ la supprimer du problème à résoudre $\Longrightarrow$ élimination progressive des variables artificielles

Variation de la phase I

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$$

$$s.c. \left\{ \begin{array}{rl} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n + m) \end{array} \right.$$

$\Longrightarrow$ ne tient pas compte de la fonction objectif

$\Longrightarrow$ risque d'obtenir une solution réalisable très éloignée de l'optimum du problème d'origine

la méthode «big M»

1. choisr un M très grand
2. résoudre max $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$ au lieu de min $\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$