Cours 5 : Phase I – Phase 2

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

Problème d'initialisation de l'algo du simplexe

Problème de départ :

$$\begin{array}{lrcl}
\max & -2x_1 - x_2 & & \\
s.c. & -2x_1 - 3x_2 & \leq & -19 \\
 & 3x_1 + 4x_2 & \leq & 32 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & &
\end{array}$$

Problème d'initialisation de l'algo du simplexe

Problème de départ :

$$\begin{array}{llcl}
\max & -2x_1 - x_2 & & \\
s.c. & -2x_1 - 3x_2 & \leq & -19 \\
 & 3x_1 + 4x_2 & \leq & 32 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & &
\end{array}$$

Introduction des variables d'écart :

$$\begin{array}{llcl}
\max & -2x_1 - x_2 & & \\
s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 & = & -19 \\
 & 3x_1 + 4x_2 + x_4 & = & 32 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & &
\end{array}$$

Problème d'initialisation de l'algo du simplexe

Problème de départ :

$$\begin{array}{llcl}
\max & -2x_1 - x_2 & & \\
s.c. & -2x_1 - 3x_2 & \leq & -19 \\
 & 3x_1 + 4x_2 & \leq & 32 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & &
\end{array}$$

Introduction des variables d'écart :

$$\begin{array}{llcl}
\max & -2x_1 - x_2 & & \\
s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 & = & -19 \\
 & 3x_1 + 4x_2 + x_4 & = & 32 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & &
\end{array}$$

Base évidente : x_3, x_4

Problème de départ :

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & -2x_1 & - & x_2 & & \\ s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & \leq & -19 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 32 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & & \end{array}$$

Introduction des variables d'écart :

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & -2x_1 & - & x_2 & & \\ s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + & \boxed{\begin{array}{ll} x_3 & \\ & + x_4 \end{array}} \begin{array}{l} = -19 \\ = \quad 32 \end{array} \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & & \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & & & & \end{array}$$

Base évidente : x_3, x_4 ⚠ non réalisable !!!!!!!!

Problème avec variables d'écart :

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & -2x_1 & - & x_2 & & \\
s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + \boxed{\begin{array}{ll} x_3 & \\ & + x_4 \end{array}} & \begin{array}{l} = -19 \\ = 32 \end{array} \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & & \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & & & &
\end{array}
$$

Problème avec variables d'écart :

$$\begin{array}{lrcrcl}
\max & -2x_1 & - & x_2 & & \\
s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + \boxed{\begin{array}{ll} x_3 & \\ & + x_4 \end{array}} & \begin{array}{l} = -19 \\ = 32 \end{array} \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & & \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0}
\end{array}$$

Introduction de variables artificielles :

$$\begin{array}{lrcrcl}
\max & -2x_1 & - & x_2 & & \\
s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + x_3 \quad + \boxed{\begin{array}{rr} & - x_5 \\ x_4 & \end{array}} & \begin{array}{l} = -19 \\ = 32 \end{array} \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & & \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}$$

$\Longrightarrow$ nouvelle base réalisable évidente : x_4, x_5

Problème avec variables d'écart :

$$\begin{array}{llll} \max & -2x_1 - x_2 & & \\ s.c. & -2x_1 - 3x_2 + \boxed{\begin{array}{ll} x_3 & \\ & + x_4 \end{array}} & \begin{array}{l} = \\ = \end{array} & \begin{array}{r} -19 \\ 32 \end{array} \\ & 3x_1 + 4x_2 & & \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & & \end{array}$$

Introduction de variables artificielles :

$$\begin{array}{llll} \max & -2x_1 - x_2 & & \\ s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 \quad \boxed{\begin{array}{lr} & - x_5 \\ x_4 & \end{array}} & \begin{array}{l} = \\ = \end{array} & \begin{array}{r} -19 \\ 32 \end{array} \\ & 3x_1 + 4x_2 \qquad + & & \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & & \end{array}$$

$\Longrightarrow$ nouvelle base réalisable évidente : x_4, x_5

Simplexe $\Longrightarrow$ si $x_5 = 0$ alors optimum du problème de départ

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & -2x_1 & - & x_2 & & & & & & & & \\
s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & -19 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & & & = & 32 \\
 & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & -2x_1 & - & x_2 & & & & & & & & \\
s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & -19 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & & & = & 32 \\
 & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}$$

Assurer que $x_5 = 0$:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\min & & & x_5 & & & & & & & & \\
s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & -19 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & & & = & 32 \\
 & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_1 - x_2 \\ s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = -19 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 32 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Assurer que $x_5 = 0$:

$$\begin{array}{ll} \min & x_5 \\ s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = -19 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 32 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Problème d'origine réalisable ssi $\min x_5 \implies x_5 = 0$

$$
\begin{array}{llcl}
\max & -2x_1 - x_2 & & \\
s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 \qquad - x_5 & = & -19 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \qquad + x_4 & = & 32 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Assurer que $x_5 = 0$:

$$
\begin{array}{llcl}
\min & x_5 & & \\
s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 \qquad - x_5 & = & -19 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \qquad + x_4 & = & 32 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Problème d'origine réalisable ssi min $x_5 \implies x_5 = 0$

Phase I : résolution du problème min x_5

Résolution du problème :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\min & & & & & & & & & x_5 & & \\
s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & -19 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & & & = & 32 \\
 & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}$$

Résolution du problème :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & & & & & & & & - & x_5 & & \\
s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & -19 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & & & = & 32 \\
 & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

Résolution du problème :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & & & & & & & & - & x_5 & & \\
s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & -19 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & & & = & 32 \\
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Expression en fonction des variables hors base :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & & & - & 19 \\
s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & -19 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & & & = & 32 \\
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Résolution du problème :

$$\begin{array}{lrrrrrl}
\max & & & & & -x_5 & \\
s.c. & -2x_1 & -3x_2 & +x_3 & & -x_5 & = -19 \\
& 3x_1 & +4x_2 & & +x_4 & & = 32 \\
& \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}$$

Expression en fonction des variables hors base :

$$\begin{array}{lrrrrrl}
\max & 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & & & -19 \\
s.c. & -2x_1 & -3x_2 & +x_3 & & -x_5 & = -19 \\
& 3x_1 & +4x_2 & & +x_4 & & = 32 \\
& \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}$$

Résolution : faire entrer x_2 et sortir x_5 :

$$\begin{array}{lrrrrrl}
\max & & & & & -x_5 & \\
s.c. & \frac{2}{3}x_1 & +x_2 & -\frac{1}{3}x_3 & & +\frac{1}{3}x_5 & = \frac{19}{3} \\
& \frac{1}{3}x_1 & & +\frac{4}{3}x_3 & +x_4 & -\frac{4}{3}x_5 & = \frac{20}{3} \\
& \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}$$

Résolution du problème :

$$\begin{array}{llr}
\max & & -x_5 \\
s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 & -x_5 = -19 \\
& 3x_1 + 4x_2 + x_4 & = 32 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 &
\end{array}$$

Expression en fonction des variables hors base :

$$\begin{array}{llr}
\max & 2x_1 + 3x_2 - x_3 & - 19 \\
s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 & -x_5 = -19 \\
& 3x_1 + 4x_2 + x_4 & = 32 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 &
\end{array}$$

Résolution : faire entrer x_2 et sortir x_5 :

$$\begin{array}{llr}
\max & & - x_5 \\
s.c. & \frac{2}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 & + \frac{1}{3}x_5 = \frac{19}{3} \\
& \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_3 + x_4 & - \frac{4}{3}x_5 = \frac{20}{3} \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 &
\end{array}$$

Variables en base : x_2, x_4
$\Longrightarrow x_5 = 0$
$(x_1 = 0, x_2 = \frac{19}{3}, x_3 = 0, x_4 = \frac{20}{3})$ = solution réalisable du problème d'origine

Dernière itération du simplexe :

$$
\begin{array}{llllllll}
\max & & & & & - & x_5 & \\
s.c. & \frac{2}{3}x_1 & + x_2 & - \frac{1}{3}x_3 & & + & \frac{1}{3}x_5 & = \frac{19}{3} \\
& \frac{1}{3}x_1 & & + \frac{4}{3}x_3 & + x_4 & - & \frac{4}{3}x_5 & = \frac{20}{3} \\
& \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

⚠ $x_5 = 0$
$\Longrightarrow$ on peut supprimer x_5 des équations

Dernière itération du simplexe :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & & & & & & & & - & x_5 & & \\
\text{s.c.} & \frac{2}{3}x_1 & + & x_2 & - & \frac{1}{3}x_3 & & & + & \frac{1}{3}x_5 & = & \frac{19}{3} \\
 & \frac{1}{3}x_1 & & & + & \frac{4}{3}x_3 & + & x_4 & - & \frac{4}{3}x_5 & = & \frac{20}{3} \\
 & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

⚠ $x_5 = 0$ $\Longrightarrow$ on peut supprimer x_5 des équations

Retour sur le problème d'origine :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & -2x_1 & - & x_2 & & & & & & \\
\text{s.c.} & \frac{2}{3}x_1 & + & x_2 & - & \frac{1}{3}x_3 & & & = & \frac{19}{3} \\
 & \frac{1}{3}x_1 & & & + & \frac{4}{3}x_3 & + & x_4 & = & \frac{20}{3} \\
 & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0}
\end{array}
$$

Dernière itération du simplexe :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & & & & & & & & - & x_5 & & \\
s.c. & \frac{2}{3}x_1 & + & x_2 & - & \frac{1}{3}x_3 & & & + & \frac{1}{3}x_5 & = & \frac{19}{3} \\
& \frac{1}{3}x_1 & & & + & \frac{4}{3}x_3 & + & x_4 & - & \frac{4}{3}x_5 & = & \frac{20}{3} \\
& \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

$x_5 = 0$
$\Longrightarrow$ on peut supprimer x_5 des équations

Retour sur le problème d'origine :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & -2x_1 & - & x_2 & & & & & & \\
s.c. & \frac{2}{3}x_1 & + & x_2 & - & \frac{1}{3}x_3 & & & = & \frac{19}{3} \\
& \frac{1}{3}x_1 & & & + & \frac{4}{3}x_3 & + & x_4 & = & \frac{20}{3} \\
& \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0}
\end{array}
$$

Algo du simplexe sur ce problème : phase II

Problème d'origine (après introduction des variables d'écart) :

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Phase I – phase 2 (1/5)

Problème d'origine (après introduction des variables d'écart) :

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Introduction des variables artificielles :

$x_{n+1} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0$ telles que :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i x_{n+i} = b_i, \text{ où } w_i = \begin{cases} 1 \text{ si } b_i \geq 0 \\ -1 \text{ si } b_i < 0 \end{cases}$$

Problème d'origine (après introduction des variables d'écart) :

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Introduction des variables artificielles :

$x_{n+1} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0$ telles que :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i x_{n+i} = b_i, \text{ où } w_i = \begin{cases} 1 \text{ si } b_i \geq 0 \\ -1 \text{ si } b_i < 0 \end{cases}$$

⚠ si $b_i \geq 0$: variables d'écart $\Longrightarrow$ variables artificielles inutiles

Nouveau simplexe :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n+m) \end{cases}$$

Nouveau simplexe :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n+m) \end{cases}$$

Solution réalisable :

$$x_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq n \\ b_i/w_i & \text{si } j > n \end{cases}$$

Détermination d'une solution réalisable du problème d'origine :

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n+m) \end{cases}$$

Détermination d'une solution réalisable du problème d'origine :

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n+m) \end{cases}$$

Proposition

Le problème d'origine a une solution réalisable si et seulement si le problème ci-dessus a une solution dont la valeur (fonction objectif) vaut 0

Début de la phase 2 :

si $\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} > 0$ alors problème d'origine non réalisable

sinon tableau simplexe :

$\Longrightarrow$ solution réalisable $(x_1^*, \ldots, x_{n+m}^*)$ telle que $x_{n+i}^* = 0\ \forall i = 1, \ldots, m$

Début de la phase 2 :

si $\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} > 0$ alors problème d'origine non réalisable

sinon tableau simplexe :

$\Longrightarrow$ solution réalisable $(x_1^*, \ldots, x_{n+m}^*)$ telle que $x_{n+i}^* = 0 \; \forall i = 1, \ldots, m$

Problème d'origine équivalent à :

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ x_{n+i} = 0 & (i = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

Résolution du problème d'origine :

1. supprimer toutes les variables artificielles hors base

⚠ il peut rester des variables artificielles en base (présence de contraintes redondantes)

2. résoudre avec l'algo du simplexe et variable artificielle sort de la base $\Longrightarrow$ la supprimer du problème à résoudre $\Longrightarrow$ élimination progressive des variables artificielles

Variation de la phase I

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n+m) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ ne tient pas compte de la fonction objectif

$\Longrightarrow$ risque d'obtenir une solution réalisable très éloignée de l'optimum du problème d'origine

Variation de la phase I

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$$

$$s.c. \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n+m) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ ne tient pas compte de la fonction objectif

$\Longrightarrow$ risque d'obtenir une solution réalisable très éloignée de l'optimum du problème d'origine

la méthode «big M»

1. choisir un M très grand
2. résoudre $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$ au lieu de $\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$