

Cours 4 : méthode révisée du simplexe

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

En route vers la méthode révisée

Point de départ :

- à chaque itération du simplexe, on recalcule entièrement le tableau
- seule une petite partie du tableau sert pour une itération donnée

⇒ perte de temps

principe de la méthode révisée du simplexe

Essayer de reconstruire cette petite partie à partir du tableau d'origine

⇒ a priori, moins de calculs à effectuer

- méthode utilisée pour résoudre les gros problèmes linéaires (milliers de variables et de contraintes), en général peu denses (beaucoup de 0)

Relation tableau à l'itération n – tableau d'origine (1/6)

Problème de départ :

$$\begin{aligned} \max & 19x_1 + 13x_2 + 12x_3 + 17x_4 \\ \text{s.c.} & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 255 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 117 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 420 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Introduction des variables d'écart :

$$\begin{aligned} \max & 19x_1 + 13x_2 + 12x_3 + 17x_4 \\ \text{s.c.} & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 255 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 117 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_7 = 420 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

Relation tableau à l'itération n – tableau d'origine (2/6)

Tableau d'origine :

$$\begin{array}{r} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 255 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 117 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_7 = 420 \\ \hline -z + 19x_1 + 13x_2 + 12x_3 + 17x_4 = 0 \end{array}$$

Première itération : faire entrer x_1 et sortir x_5 :

$$\begin{array}{r} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = 85 \\ \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 + x_6 = 32 \\ \frac{1}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_5 + x_7 = 80 \\ \hline -z + \frac{1}{3}x_2 + \frac{17}{3}x_3 + \frac{13}{3}x_4 - \frac{19}{3}x_5 = -1615 \end{array}$$

Relation tableau à l'itération n – tableau d'origine (3/6)

$$\text{base } (\hat{x}_1, \hat{x}_6, \hat{x}_7) = (85, 32, 80) \implies \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4, \hat{x}_5 = 0$$

opérations algébriques \implies toute solution réalisable d'un tableau est aussi solution réalisable des tableaux précédents

Tableau d'origine : **Première itération :**

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 & = & 255 \\ x_1 + x_6 & = & 117 \\ 4x_1 + x_7 & = & 420 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x_1 & = & 85 \\ x_6 & = & 32 \\ x_7 & = & 80 \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{array}{r} 3x_1 \\ x_1 + x_6 \\ 4x_1 + x_7 \end{array}}_B \quad \underbrace{\begin{array}{r} 255 \\ 117 \\ 420 \end{array}}_b \quad \underbrace{\begin{array}{r} x_1 \\ x_6 \\ x_7 \end{array}}_{B^{-1}B} \quad \underbrace{\begin{array}{r} 85 \\ 32 \\ 80 \end{array}}_{B^{-1}b}$$

\implies les tableaux du simplexe s'expriment en fonction de B^{-1}

Relation tableau à l'itération n – tableau d'origine (4/6)

- problème à résoudre :

$$\begin{array}{l} \max c^T x \\ \text{s.c. } \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

- base réalisable $\implies x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$:

$$x_B = (x_1, x_6, x_7) \quad x_N = (x_2, x_3, x_4, x_5)$$

- $A = [B \ N]$:

$$\begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_B \quad \underbrace{\hspace{10em}}_N$$

- $Ax = Bx_B + Nx_N$

- $Ax = b \implies x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

Relation tableau à l'itération n – tableau d'origine (5/6)

- $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \implies c^T = [c_B^T \ c_N^T]$

$$z = c^T x = 19x_1 + 13x_2 + 12x_3 + 17x_4$$

$$\implies c^T = [19 \ 13 \ 12 \ 17 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\implies c_B^T = [19 \ 0 \ 0] \text{ et } c_N^T = [13 \ 12 \ 17 \ 0]$$

- $c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N$

- $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \implies c_B^T x_B = c_B^T B^{-1}b - c_B^T B^{-1}Nx_N$

- $z = c_B^T x_B + c_N^T x_N \implies z = c_B^T B^{-1}b - c_B^T B^{-1}Nx_N + c_N^T x_N$

$$\implies z = c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N$$

Relation tableau à l'itération n – tableau d'origine (6/6)

Définition d'un dictionnaire

- $B = \text{base}, N = \text{hors base}$
- $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$
- $z = c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N$

\implies méthode révisée du simplexe

Méthode révisée du simplexe (1/8)

À chaque itération de l'algorithme :

- 1 choisir une variable entrante
- 2 choisir une variable sortante $\implies (x_B, x_N)$
- 3 faire une mise à jour de la solution réalisable : \widehat{x}_B

Exemple :

$$\begin{array}{r} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ -z + 19x_1 + 13x_2 + 12x_3 + 17x_4 \end{array} \begin{array}{l} \\ + x_6 \\ + x_7 \\ = 0 \end{array} = \begin{array}{l} 255 \\ 117 \\ 420 \\ \end{array}$$

$$\implies B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \widehat{x}_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_6 \\ \widehat{x}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85 \\ 32 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Méthode révisée du simplexe (2/8)

prochaine variable entrante : une variable dont le coefficient dans z est positif \implies calculer z

$$\text{calcul de } z = c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N :$$

- 1 calculer $y^T = c_B^T B^{-1} \implies$ résoudre le système $y^T B = c_B^T$:

$$[y_1 \ y_2 \ y_3] \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = c_B^T = [19 \ 0 \ 0] \implies y^T = \left[\frac{19}{3} \ 0 \ 0 \right]$$

- 2 calculer $h^T = y^T N$:

$$h^T = y^T N = \left[\frac{19}{3} \ 0 \ 0 \right] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \left[\frac{38}{3} \ \frac{19}{3} \ \frac{38}{3} \ \frac{19}{3} \right]$$

- 3 calculer $\widehat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T - h^T$:

$$\widehat{c}_N^T = [13 \ 12 \ 17 \ 0] - \left[\frac{38}{3} \ \frac{19}{3} \ \frac{38}{3} \ \frac{19}{3} \right] = \left[\frac{1}{3} \ \frac{17}{3} \ \frac{13}{3} \ \frac{-19}{3} \right]$$

Méthode révisée du simplexe (3/8)

$$\implies \widehat{c}_N^T = \left[\frac{1}{3} \ \frac{17}{3} \ \frac{13}{3} \ \frac{-19}{3} \right]$$

Après la première itération du simplexe :

$$\begin{array}{r} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \\ \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 + x_6 \\ \frac{1}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_5 \\ -z + \frac{1}{3}x_2 + \frac{17}{3}x_3 + \frac{13}{3}x_4 - \frac{19}{3}x_5 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ + x_7 \\ = 0 \end{array} = \begin{array}{l} 85 \\ 32 \\ 80 \\ -1615 \end{array}$$

$$\widehat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = \text{coeffs hors base de la fonction objectif pour la base } (x_1, x_6, x_7)$$

Méthode révisée du simplexe (4/8)

$$\widehat{c}_N^T = \left[\frac{1}{3} \ \frac{17}{3} \ \frac{13}{3} \ \frac{-19}{3} \right]$$

choix de la variable entrante : n'importe quelle variable de coeff positif dans \widehat{c}_N^T

$$\begin{aligned} \widehat{c}_N^T &= c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T - y^T N \\ &= [13 \ 12 \ 17 \ 0] - \left[\frac{19}{3} \ 0 \ 0 \right] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left[\frac{1}{3} \ \frac{17}{3} \ \frac{13}{3} \ \frac{-19}{3} \right] \end{aligned}$$

\implies on n'est pas obligé de calculer tout \widehat{c}_N^T :

e.g., calculer \widehat{c}_N^T colonne par colonne et s'arrêter quand on a un nombre positif

Méthode révisée du simplexe (5/8)

$$\widehat{C}_N^T = \begin{bmatrix} 1 & 17 & 13 & -19 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{x}_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_6 \\ \widehat{x}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85 \\ 32 \\ 80 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 & = & 255 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 & = & 117 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_7 & = & 420 \\ \hline -z + 19x_1 + 13x_2 + 12x_3 + 17x_4 & = & 0 \end{array}$$

choix de la variable entrante : x_3

\Rightarrow augmenter la valeur de x_3 tout en assurant que les valeurs de x_B restent positives

$$Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

soit a la colonne de N correspondant à $x_3 \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}ax_3$

Méthode révisée du simplexe (6/8)

soit a la colonne de N correspondant à $x_3 \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}ax_3$

calcul de $d = B^{-1}a$: résoudre $Bd = a$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow d = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85 \\ 32 \\ 80 \end{bmatrix} - x_3 \times \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow valeur max de $x_3 = 48$ (ligne de x_6) $\Rightarrow x_6$ sort de la base

Méthode révisée du simplexe (7/8)

$$d = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Après la première itération du simplexe :

$$\begin{array}{rcl} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 & = & 85 \\ \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 + x_6 & = & 32 \\ \frac{1}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_5 + x_7 & = & 80 \\ \hline -z + \frac{1}{3}x_2 + \frac{17}{3}x_3 + \frac{13}{3}x_4 - \frac{19}{3}x_5 & = & -1615 \end{array}$$

$\Rightarrow d =$ colonne de x_3 après la première itération du simplexe

Méthode révisée du simplexe (8/8)

Après la première itération du simplexe :

$$\begin{array}{rcl} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6 & = & 69 \\ \frac{1}{2}x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 + \frac{3}{2}x_6 & = & 48 \\ -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{5}{2}x_6 + x_7 & = & 0 \\ \hline -z - \frac{5}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{7}{2}x_5 - \frac{17}{2}x_6 & = & -1887 \end{array}$$

$$d = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \widehat{x}_B - 48 \times d = \begin{bmatrix} 85 \\ 32 \\ 80 \end{bmatrix} - 48 \times \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 69 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\widehat{x}_B - 48d \Rightarrow$ valeurs des variables en base \Rightarrow nouvel \widehat{x}_B

Synthèse sur la méthode révisée du simplexe

Itération de l'algorithme révisé du simplexe

B = base courante \widehat{x}_B = valeur de la solution courante

- 1 calculer y^T tel que $y^T B = c_B^T$ ($\implies y^T = c_B^T B^{-1}$)
- 2 choisir une colonne entrante : n'importe quelle colonne a de N telle que $c_a^T > y^T a$, où c_a^T = coeff de la colonne a dans c^T
- 3 calculer d tel que $Bd = a$ ($\implies d \approx$ valeur de la colonne a après itération du simplexe)
- 4 trouver le plus grand nombre t tel que $\widehat{x}_B - td \geq 0$
 - si $t = +\infty$: problème non borné
 - sinon : au moins 1 ligne = 0 \implies variable sortant de la base
- 5 remplacer \widehat{x}_B par $\widehat{x}_B - td$, puis la ligne correspondant à la variable sortante par t
- 6 remplacer dans B la colonne de la variable sortante par celle de la variable entrante

Calcul efficace de B^{-1} (1/4)

Efficacité de l'algo révisé : calcul de $y^T B = c_B^T$ et de $Bd = a$

- B_k : base après k itérations
- B_k ne diffère de B_{k-1} que par la colonne a rentrant à l'itération k
- supp que la colonne de a dans B_k soit la p ème
- a est la colonne qui rentre \implies à la k ème itération, $B_{k-1}d = a$

calcul de B_k

- E_k = matrice unité dont la p ème colonne est remplacée par d
- $B_k = B_{k-1} E_k$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcul efficace de B^{-1} (2/4)

- $B_0 = I$
- $B_1 = E_1$
- $B_2 = E_1 E_2$
- $B_3 = E_1 E_2 E_3$
-

- $y^T B_k = c_B^T \implies y^T E_1 E_2 E_3 \dots E_k = c_B^T$
- $(\dots ((y^T E_1) E_2) E_3) \dots E_k = c_B^T$
- calcul de y :
 - 1 $y_k^T E_k = c_B^T$
 - 2 $y_{k-1}^T E_{k-1} = y_k^T$
 - 3 $y_{k-2}^T E_{k-2} = y_{k-1}^T$
 - 4
 - k $y^T E_1 = y_2^T$

Calcul efficace de B^{-1} (3/4)

résolution pratique de $y_k^T E_k = c_B^T$:

$$\begin{bmatrix} y_k^1 & y_k^2 & y_k^3 & y_k^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [3 \quad 32 \quad 4 \quad 1]$$

$$\implies \begin{bmatrix} y_k^1 \\ y_k^2 \\ y_k^3 \\ y_k^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies \text{seul } y_k^2 \text{ nécessite un calcul : } \begin{cases} s-1 & \text{additions} \\ s-1 & \text{multiplications} \\ 1 & \text{division} \end{cases}$$

En pratique :

- lorsque $B_0 \neq I$: factorisations triangulaires de B_0
- en général : factorisation de B_k à l'aide des E_k plus rapide que le calcul de B_k^{-1}
- si ça n'est plus le cas (trop d'itérations) : refactoriser B_k comme si c'était un nouveau B_0

⇒ méthode révisée plus rapide que la méthode standard sur de grosses instances